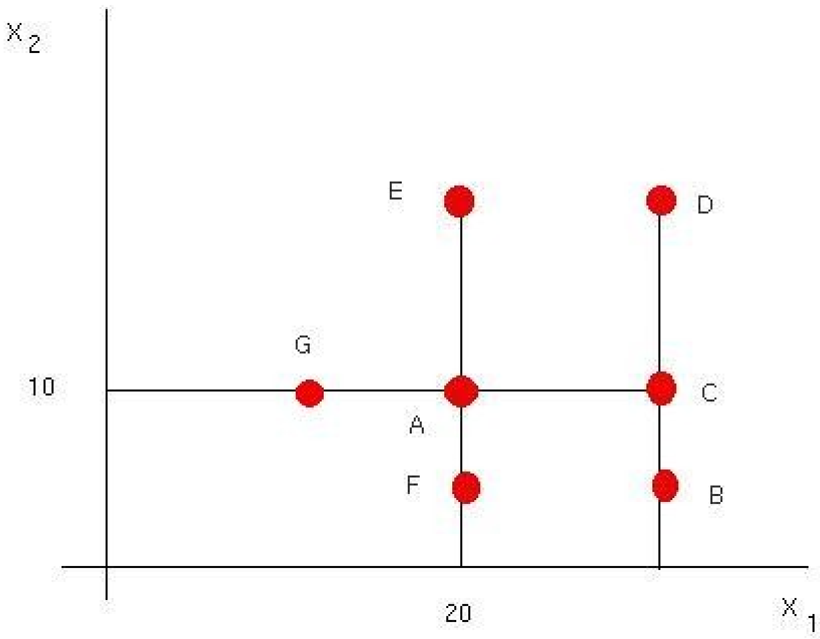
Problema No. 1. *Una estudiante observa en su salón a un grupo de compañeros que insistentemente le invitan a compartir una tasa de café, ′ al finalizar la clase. Ella a la hora de tomar la decisión de a quién aceptarle la invitación, le interesa mucho sus modales, y decide medir este factor a partir del número de veces que él saluda amablemente a sus compañeros durante un mes (* X_1 *); por otra parte parte, le interesa qué tanto cuida su imagen y decide contar el número de veces que combina adecuadamente su ropa en un mes (* X_2 *). Luego de tener los datos de todos sus compañeros ella debe tomar una decisión. Sus preferencias están dadas de acuerdo al siguiente criterio: Su primer elemento de decisión corresponde a sus modales, en caso de existir un empate en este argumento analizará su imagen. En un gráfico determine las cestas las cestas no mejores y no peores a (20, 10). ¿Qué nombre reciben estas preferencias?.*

Respuesta. *En base a la descripción de las preferencias de la estudiante, se puede deducir que dada la combinación (20, 10), la combinación* (X_1', X_2') *es preferida siempre que* $X_1' > 20$ *. Es decir, la estudiante tiene una preferencia estricta por* (X_1', X_2') *siempre que* $X_1' > 20$ *. Ahora bien, suponiendo que* $X_1' = 20$ *entonces la estudiante la considerará al menos tan buena como (20, 10) si* $X_2' \geq 10$ *. En consecuencia, todas las combinaciones de los bienes 1 y 2 que tengan más de 20 unidades del bien 1, serán estrictamente preferidas a la combinación inicial (20, 10), y todas las combinaciones donde se tenga 20 unidades del bien 1 y más del bien 2, también serán estrictamente preferidas a la combinación inicial (20, 10). Y todas las combinaciones que tengan 20 unidades del bien 1 y 10 unidades del bien 2 serán indiferentes a la combinación inicial (20, 10).*

Sin embargo, en este último caso, dada la combinación inicial (20, 10), la única combinación con igual cantidad del bien 1 e igual cantidad del bien 2, es (20, 10). Por lo tanto, las combinaciones que no son mejores y no son peores a la combinación (20, 10) no existen.

El conjunto de preferencias débiles de la estudiante, serán todas aquellas combinaciones de los bienes 1 y 2 que tengan al menos la misma cantidad del bien 1 y al menos la misma cantidad del bien 2. En el siguiente gráfico se aprecia la combinación inicial (20, 10) y otras combinaciones de los bienes.



La combinación A es la combinación inicial con 20 unidades del bien 1 y 10 del bien 2. Las *combinaciones B, C y D, todas tienen más de 20 unidades del bien 1 y por lo tanto son estrictamente preferidas a la combinación A, independiente del hecho que tengan más del bien 2 (combinación D), o la misma cantidad (combinación C) o menos (combinación B). La combinación E es también estrictamente preferida a la combinación A a pesar que tiene la misma cantidad del bien 1, 20 unidades, porque tiene más del bien 2. Todas las combinaciones de bienes como E, que tienen 20 unidades del bien 1 y más unidades del bien 2, son estrictamente preferidas a la combinación A. La combinación F no es preferida a la combinación A porque tiene 20 unidades del bien 1 pero menos del bien 2. Todas las combinaciones, como F que tienen 20 unidades del bien 1 pero menos del bien 2, no son preferidas frente a A. Finalmente, la combinación G que tiene menos de 20 unidades del bien 1 pero igual cantidad del bien 2, no es preferida a la combinación A. Todas las combinaciones de bienes como G, que tienen menos de 20 unidades del bien 1 no son preferidas a la combinación A. Y todas las combinaciones de bienes que tienen menos de 20 unidades del bien A independientemente del hecho que puedan tener más unidades del bien 2 o menos unidades del bien 2 o igual cantidad de unidades del bien 2, no son preferidas a la combinación A.*

Las preferencias anteriores se conocen como lexicograficas. Y se refieren a preferencias entre bienes discretos (no contínuos), en donde el consumidor le da la primera importancia al bien 1.

***Problema No. 2**. A un hogar representativo de una población se le quiere analizar sus hábitos de consumo de agua potable (bien no gratuito suministrado por la empresa de acueducto del lugar) (x) y por el consumo una canasta de referencia de otros bienes (c). Como es de esperar, el consumo de agua es completamente inelástico al nivel de ingreso mientras que la canasta depende tanto de los precios como del ingreso. Se sabe que, en un caso extremo, si el ingreso del hogar es menor al precio por unidad de la canasta, el individuo solo demanda agua. Si τ representa la tarifa por metro cúbico consumido y p el precio de cada canasta de referencia, proponga una función de utilidad que modele las preferencias. Determine las demandas de mercado y la función de utilidad indirecta. Si p = 2000 y τ = 200 y el ingreso disponible del hogar es de \$500,000, determine la mejor elección del individuo.*

***Respuesta**. Como el consumo de agua es completamente inelástico al nivel del ingreso y el consumo de la canasta de referencia depende del precio y del ingreso, una función de utilidad que modela estas preferencias es la función de utilidad cuasilineal, como por ejemplo* $U=f(X)+C \rightarrow U=X^{1/2}+C$ *. Se trata de una función cuyas curvas de indiferencia son convexas y donde la cantidad demandada del bien X no depende del ingreso del consumidor. En la combinación óptima, la pendiente de la curva de indiferencia debe ser igual a la pendiente de la recta de presupuesto. Es decir:* $\frac{dU/dX}{dU/dC}=P_X/P_C \rightarrow \frac{1}{X^{1/2}}=P_X/P_C$ *. Y de aquí se puede obtener la demanda de X en función de su precio y del precio de C,* $X=\frac{P_C^2}{4P_X^2}$ *. Se aprecia que la demanda de X no dependen del ingreso del consumidor, es decir es completamente inelástico frente al ingreso. Y teniendo la demanda del bien X, se puede hallar la demanda del bien C mediante la restricción de presupuesto. El consumidor comprará el bien C hasta agotar su ingreso dado el gasto que ha realizado en el bien X. El gasto en el bien X es igual a la demanda del bien X multiplicada por su precio,* $XP_X=\frac{P_C^2}{4P_X}$ *. El saldo del ingreso, luego de gastar en el bien X, es igual al ingreso del consumidor menos el gasto en X. Y este saldo del ingreso dividido entre el precio de C nos da la demanda de C.* $C=\frac{m-(\frac{P_C^2}{4P_X})}{P_C}$ *.*

Ahora que tenemos las demandas de los bienes, se puede obtener la función de utilidad indirecta, *aplicando las demandas obtenidas, a la función de utilidad propuesta.* $U=X^{1/2}+C$ *, entonces la función indirecta de utilidad es* $FIU=(\frac{P_C^2}{4P_X^2})^{1/2}+\frac{(m-(\frac{P_C^2}{4P_X}))}{P_C}$.

Ahora vamos a estimar la mejor elección del consumidor si su ingreso es 500000, el precio del bien X es 200 y el precio del bien C es 2000:

$X=\frac{P_C^2}{4P_X^2}\rightarrow X=25$. $C=\frac{m-(\frac{P_C^2}{4P_X})}{P_C}=247{,}5$ *. La combinación óptima es (25 , 247,50).*

Problema No. 3*. A un hogar representativo se le ofrece un plan de minutos de celular del operador 1(M1)en la que la tarifa es función del número de minutos que demande. De esta forma, si demanda hasta 100 minutos al mes, la tarifa por minuto será de $150 y si demanda más de 100 minutos, la tarifa por minuto será de 100. De otro lado se denota por M2 el plan de minutos ofrecido por el operador 2 quien cobra una tarifa por minuto p = 100 independientemente del número de minutos consumidos. Si el hogar está dispuesto a agotar todo su ingreso en minutos del operador 1 siempre que este no supere 1.2 veces el precio del otro, indique una función de utilidad que modele estas preferencias y encuentre la mejor elección de este hogar.*

Respuesta*. El hogar demanda minutos del operador 1 y/o minutos del operador 2. Y está dispuesto a demandar solo minutos del operador 1 mientras el precio de este operador no supere 1.2 veces el precio del otro operador. Es decir, la demanda del hogar será* m/P_1 *siempre que* $\frac{P_1}{P_2}\leq 1.2$ *. Una consecuencia de este comportamiento, es que la demanda del hogar será* m/P_2 *siempre que* $\frac{P_1}{P_2}>1.2$ *. Se entiende que si* $\frac{P_1}{P_2}=1.2$ *entonces al hogar le es indiferente demandar minutos al operador 1 o al operador 2.*

En otras palabras, el hogar considera que los minutos de un operador son sustitutos perfectos de los minutos del otro operador, a una tasa constante de cambio. Una función de utilidad que expresa este comportamiento es $U=1.2X_1+X_2$ *. Se trata de una función lineal de pendiente negativa y, en consecuencia, con una pendiente constante que representa la tasa subjetiva de cambio, o tasa marginal de sustitución. Para esta función, la pendiente de las curvas de indiferencia es 1.2. Si esta pendiente es igual a la pendiente de la recta de presupuesto, el hogar alcanzará la máxima utilidad en cualquier combinación de minutos del operador 1 y del operador 2 sobre su recta de presupuesto. Esto es así porque la pendiente de la curva de indiferencia indica la tasa a la que está dispuesto a cambiar minutos del operador 2 por un minuto adicional del operador 1, y la pendiente de la recta de presupuesto indica la tasa a la cual esto es posible en el mercado. En consecuencia, si el hogar está dispuesto a cambiar 1.2 minutos de llamadas del operador 2 para tener un minuto adicional de llamada del operador 1, se encuentra que esta es la tasa a la cual se puede hacer el cambio en el mercado. Es decir, la tasa a la cual está dispuesto a cambiar es igual a la tasa a la cual se puede cambiar.*

Pero si la pendiente de la curva de indiferencia, 1.2, es mayor a la pendiente de la recta de presupuesto, entonces el hogar que está dispuesto a cambiar 1.2 minutos de llamadas del operador 2 por una unidad adicional del operador 1, se encuentra con que en el mercado le exigen menos de 1.2 unidades. Considera que es muy barato y se decide por consumir sólo minutos del operador 1. Si, por el contrario, la pendiente de la curva de indiferencia, 1.2, es menor a la pendiente de la *recta de presupuesto, el hogar considera que es muy caro y se decide por consumir sólo minutos del operador 2.*

Todo lo anterior se refiere al comportamiento del hogar en términos de sus preferencias, de su función de utilidad. Veamos ahora la realidad del mercado en términos de los precios del operador 1 y 2. Si la cantidad demandada es mayor a 100 minutos, el precio del operador 1 es igual al precio del operador 2 y la pendiente de la recta de presupuesto será igual a la unidad. En este caso, como la pendiente de la curva de indiferencia es 1.2, $1{,}2>1$ *y el hogar destinará todo su ingreso en minutos de llamada del operador 1.*

Pero si la cantidad demandada es menor a 100 minutos, el precio del operador 1 es 150 y el precio del operador 2 es 100, y la pendiente de la recta de presupuesto será igual a 1.5. En este caso, como la pendiente de la curva de indiferencia es 1.2, $1{,}2<1.5$ *y el hogar destinará todo su ingreso en minutos de llamada del operador 2.*

Como el hogar considera que los minutos de llamadas de los operadores son sustitutos perfectos y como valora más al operador 1 que al operador 2, la elección óptima será destinar el ingreso en llamadas al operador 1 si el ingreso le permite consumir 100 o más minutos de llamadas. Pero si el ingreso solo le permite consumir menos de 100 minutos de llamadas, la elección óptima será destinar el ingreso en llamadas al operador 2.

***Problema No. 4**. Para las siguientes funciones de utilidad determine: a) cuáles de ellas representan preferencias monótonas débil y no en sentido fuerte ; b) cuáles de ellas representan preferencias convexas en sentido débil y no en sentido fuerte ; c) cuáles de ellas representan preferencias no saciables localmente y no monótonas. En cada caso justifique su respuesta.*

$$U(X_1, X_2)=\alpha X_1+\beta X_2$$
$$U(X_1, X_2)=min\{\alpha X_1, \beta X_2\}$$
$$U(X_1, X_2)=(X_1-5)^2+(X_2-5)^2$$

***Respuesta**. Las preferencias del tipo* $U(X_1, X_2)=\alpha X_1+\beta X_2$ *modelan el comportamiento del consumidor enfrentado a bienes sustitutos perfectos. Su representación gráfica es una función lineal con pendiente negativa. Y la pendiente es constante e igual a* α/β *. Significa que la tasa de cambio disponible nunca varía. Las curvas más alejadas del origen de coordenadas son estrictamente preferidas y las combinaciones sobre cada curva son indiferentes entre sí.*

En el caso de las preferencias del tipo $U(X_1, X_2)=min\{\alpha X_1, \beta X_2\}$ *, se trata de funciones de utilidad que corresponden a los bienes que para el consumidor son complementarios perfectos. Es decir, se trata de bienes que se combinan siempre en una proporción fija. La proporción fija en que se combinan es* $X_2/X_1=\alpha/\beta$ *. Su representación gráfica es una curva de indiferencia en forma de L y el óptimo se encuentra siempre sobre el vértice. Cualquier combinación de los bienes que se encuentre sobre el segmento horizontal a la derecha del vértice, trae más del bien 1 pero brinda la misma utilidad. Cualquier combinación de los bienes que se encuentre sobre el segmento vertical arriba del vértice, trae más del bien 2 pero brinda la misma utilidad. Las curvas de indiferencia más lejos del origen de coordenadas son estrictamente preferidas.*

En el caso de las preferencias del tipo $U(X_1, X_2)=(X_1-5)^2+(X_2-5)^2$ *, se trata de funciones de utilidad cuya representación gráfica corresponde a una familia de circunferencias cuyo centro se encuentra sobre la combinación (5, 5). Desde el punto de vista matemático y considerando sólo las circunferencias en el cuadrante positivo, la combinación de saciedad es (5, 5). En el tramo de* *la circunferencia en que las cantidades del bien 1 y del bien 2 son menores o iguales a 5, estos bienes son bienes. En el tramo de la circunferencia en que las cantidades del bien 1 y del bien 2 son mayores a 5, estos bienes son males. En el tramo de la circunferencia en que las cantidades del bien 1 son mayores a 5 pero las cantidades del bien 2 son menores a 5, el bien 1 es un mal y el bien 2 es un bien. Y finalmente, en el tramo de la circunferencia en que las cantidades del bien 1 son menores a 5 pero las cantidades del bien 2 son mayores a 5, el bien 1 es un bien y el bien 2 es un mal.*

Para el tramo en que los bienes son bienes, las curvas de indiferencia son convexas. Y para el tramo en que los bienes son males, las curvas de indiferencia son cóncavas. En ambos casos la tasa marginal de sustitución es negativa. En los tramos donde un bien es bien y el otro es un mal, la tasa marginal de sustitución es positiva.

A manera de conclusión: Cuando los bienes son sustitutos perfectos, las preferencias son monótonas en el sentida que más es preferido a menos, pero débil porque cualquier combinación sobre el segmento que une a dos combinaciones sobre la misma curva de indiferencia es igualmente preferida. Cuando las bienes son complementarios perfectos, las combinaciones sobre el segmento que une a dos combinaciones sobre la misma curva de indiferencia pero en lados diferentes, son estrictamente preferidas. Y las combinaciones sobre el segmento que une a dos combinaciones sobre la misma curva de indiferencia y sobre el mismo lado, son igualmente preferidas. Estas preferencias no son monótonas cuando se consideran sobre uno de los lados de la curva pero sí son monótonas cuando se consideran sobre la recta que une los vértices, conocida como senda de expansión. En el caso de bienes complementarios perfectos o sustitutos perfectos, no existe punto de saciedad.

Cuando se considera la combinación de saciedad los bienes son sustitutos imperfectos y complementarios imperfectos y son bienes mientras no llegan al punto de saciedad, y por lo tanto son monótonos. Pero luego del punto de saciedad son males y no son monótonos.

***Pregunta No. 5**. Las preferencias de Andrea, Juan, Camila, Diana, Ricardo y Sofia son caracterizadas por seis funciones de utilidad distintas, las cuales se presentan a continuación. ¿Puede decir quiénes tienen las mismas preferencias y por qué? Encuentre la tasa marginal de sustitución de cada una de las funciones de utilidad. Interprete.*

$$U_A(X_1, X_2)=X_1\sqrt{X_2}$$
$$U_J(X_1, X_2)=X_1^4 X_2^2$$
$$U_C(X_1, X_2)=(aX_1^{-2}+3\mathrm{X}_2^{-2})^{-1/2}$$
$$U_D(X_1, X_2)=X_1 X_2$$
$$U_R(X_1, X_2)=\sqrt{X_1}\sqrt{X_2}$$
$$U_S(X_1, X_2)=X_1^2 X_2$$

***Respuesta**. Las funciones de utilidad estiman el nivel ordinal de utilidad y no el cardinal; en consecuencia, dada una función de utilidad, cualquier transformación monótona de ésta representará las mismas preferencias. La función de utilidad de Andrea es del tipo $U_A(X_1, X_2)=X_1\sqrt{X_2}$. Podemos obtener una segunda función de utilidad, elevando ésta a la cuarta potencia, y obtenemos $V(X_1, X_2)=X_1^4 X_2^2$ que es una transformación monótona de la función de utilidad de Andrea y que, por lo tanto, representa las mismas preferencias. Pero esta transformación es también la función de utilidad de Juan. En consecuencia Juan y Andrea tienen las mismas preferencias. Lo mismo ocurre con la función de utilidad de Diana que es una transformación monótona de la función de utilidad de Ricardo. Se eleva a la ½ la función de utilidad de Diana y se obtiene la función de utilidad de Ricardo. Si ahora apreciamos la función de* *utilidad de Sofía, se puede apreciar que es una transformación monótona de la función de utilidad de Juan. Se eleva a la ½ la función de utilidad de Juan y se obtiene la función de utilidad de Sofía. Pero como la función de utilidad de Juan representa las mismas preferencias que la función de utilidad de Andrea, se concluye que Andrea, Juan y Sofía tienen las mismas preferencias.*

Como las preferencias de Andrea, Juan y Sofía son las mismas, tendrán la misma tasa marginal de sustitución. La calculamos en cualquiera de las funciones de utilidad y se obtiene $TMgS = \frac{2X_2}{X_1}$ *. Hacemos lo mismo en el caso de las preferencias de Ricardo y Diana, y en este caso nos da* $TMgS = \frac{X_2}{X_1}$ *.*

Si ahora estimamos la tasa marginal de sustitución para las preferencias de Camila, obtenemos $TMgS = \frac{aX_2^3}{3X_1^3}$ *. Se aprecia que, asumiendo un valor positivo para a, la TMgS de Camila es diferente a las anteriores. Y es diferente porque sus preferencias son diferentes.*

En resumen, hay tres tipos de preferencias, las de Camila, las de Ricardo y Juana, y las de Andrea, Juan y Sofía.