

Problema primal y dual en la teoría del productor

Integrantes

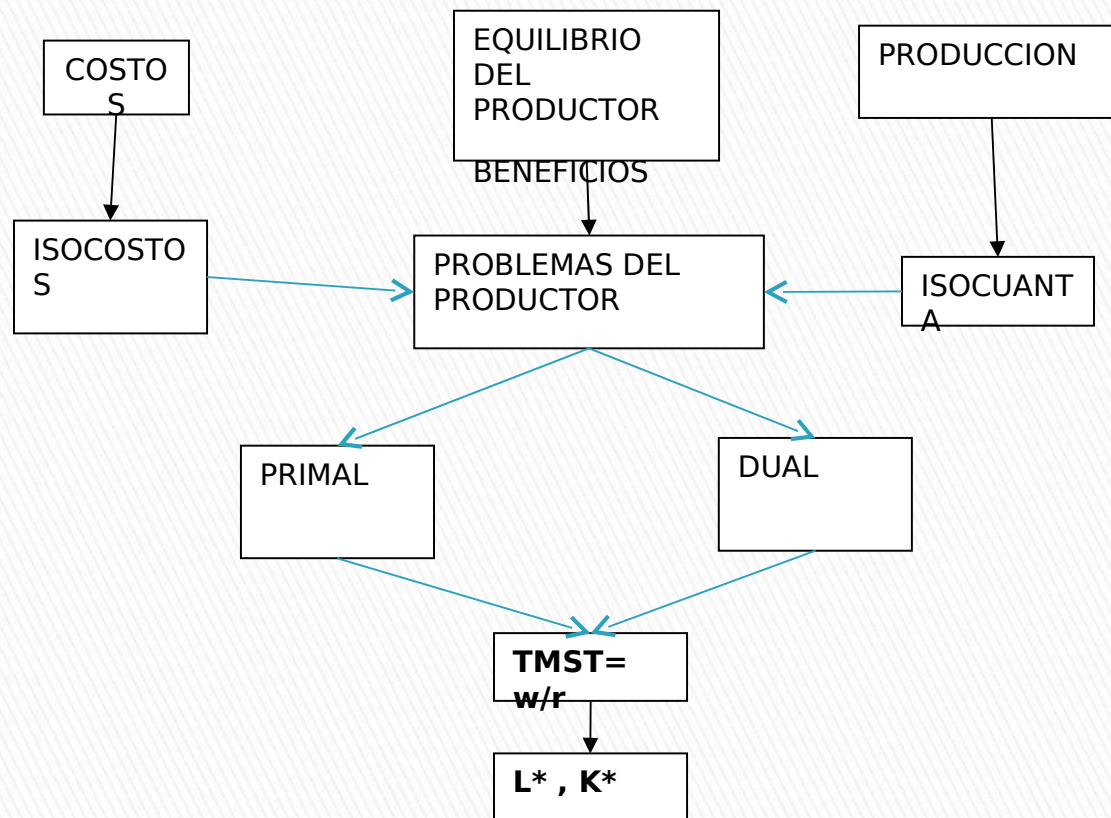
Montenegro Llanco, Alexandra

Silva Nicolas, Luis

Torres Carpio, Erika

Vilchez Quispe, Roland

PROBLEMA PRIMAL Y DUAL EN LA TEORÍA DEL PRODUCTOR



Veamos unos conceptos previos:

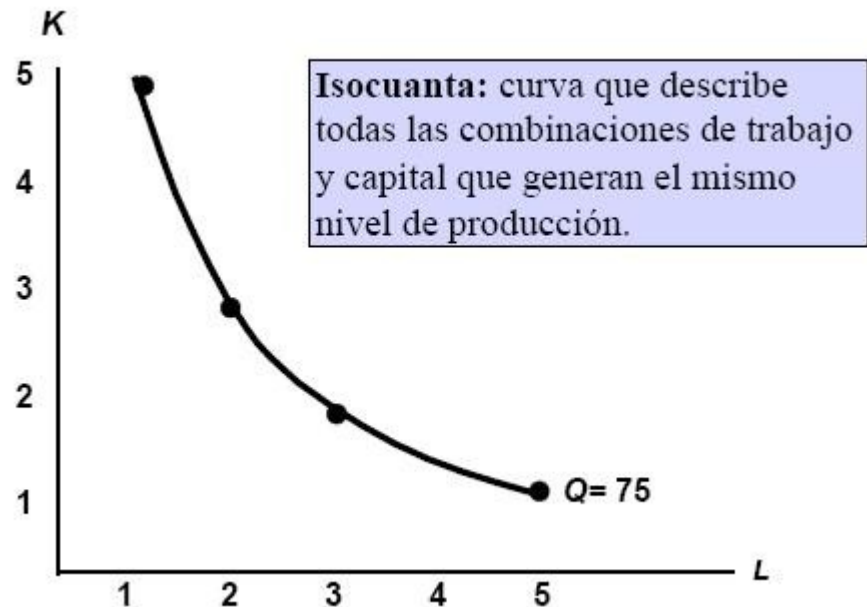
► Isocuanta:

Representa diferentes combinaciones de insumos a partir de las cuales se puede producir el mismo nivel de producto.

$$Q = f(K, L)$$

Con pendiente:

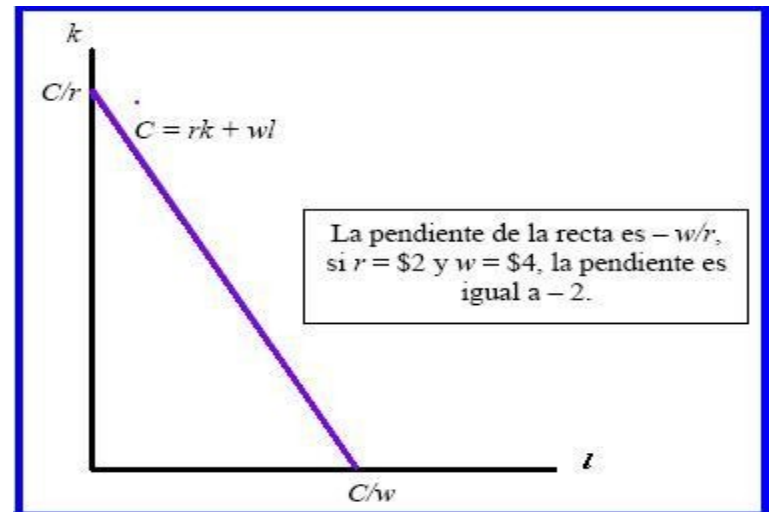
$$RMST = - \Delta K / \Delta L$$



► Recta Isocoste:

Conjunto de puntos de este espacio que representan combinaciones de factores cuyo coste es idéntico.

La pendiente de esta línea será $-w/r$ que es la relación de precios de los factores utilizados para producir.



Problema primal:
Maximizar la producción
sujeta a una restricción de
costos dados

$$\underset{k,l}{\text{Max}} q(k,l) \text{ sujeto a } CT = rk + wl$$

El Lagrangeano de este problema:

$$L = q(k, l) + \phi[CT - rk - wl]$$

Condiciones de Primer Orden:

$$(1) \frac{\partial L}{\partial k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial k} - \phi r = 0 \Rightarrow \phi = \frac{\partial q / \partial k}{r}$$

$$(2) \frac{\partial L}{\partial l} = 0 \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial l} - \phi w = 0 \Rightarrow \phi = \frac{\partial q / \partial l}{w}$$

$$(3) \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow CT - rk - wl = 0$$

Igualando (1) y (2), tenemos:

$$\frac{\partial q / \partial k}{r} = \frac{\partial q / \partial l}{w}$$
$$\frac{\partial q / \partial k}{\partial q / \partial l} = \frac{r}{w} \Rightarrow TMST_{k,l} = \frac{r}{w}$$

Problema Dual : Minimización de costos sujeta a una producción dada

$$\underset{k,l}{\text{Min}} CT = rk + wl \text{ sujeta a } q^* = q(k,l)$$

$$\underset{k,l}{\text{Min}} CT = rk + wl \text{ sujeto a } q^* = q(k,l)$$

El Lagrangeano de este problema:

$$L = rk + wl + \gamma [q^* - q(k,l)]$$

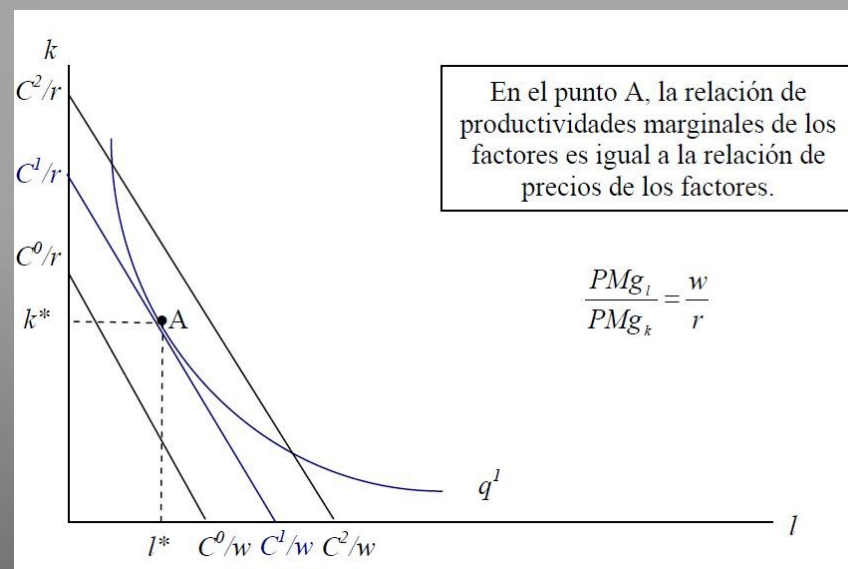
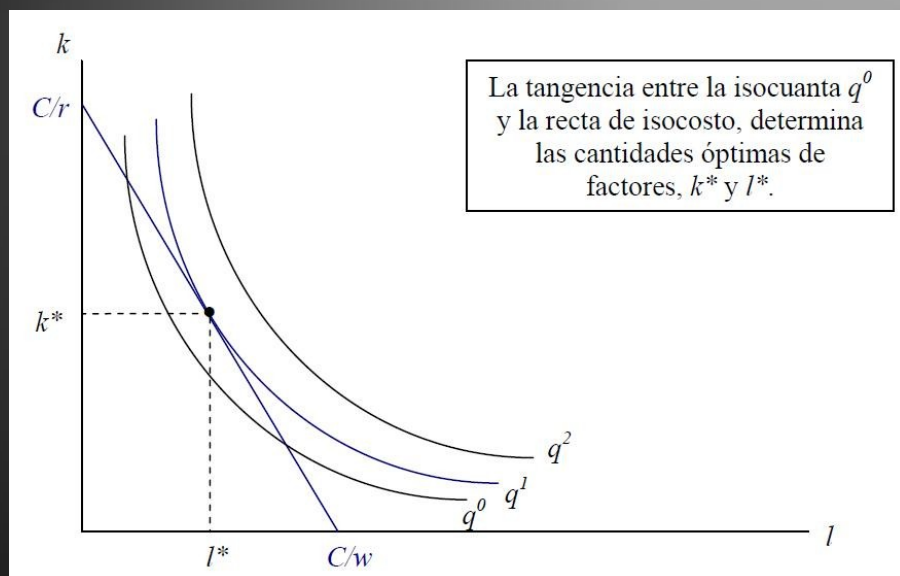
Condiciones de Primer Orden:

$$(1) \frac{\partial L}{\partial k} = 0 \Rightarrow r - \gamma \frac{\partial q}{\partial k} = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{r}{\partial q / \partial k}$$

$$(2) \frac{\partial L}{\partial l} = 0 \Rightarrow w - \gamma \frac{\partial q}{\partial l} = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{w}{\partial q / \partial l}$$

$$(3) \frac{\partial L}{\partial \gamma} = 0 \Rightarrow q^* - q(k,l) = 0$$

Observamos que se cumple la misma condición para los dos problemas y de ellos se obtienen las demandas condicionadas de factores.



Comparación entre la teoría del consumidor y la teoría de la empresa

comparaciones

Consumidor

1) $\text{Max} U$
sa. RP $I = P_x x + P_y y$
 $Z = u(X, Y) + \lambda(I - P_x x - P_y y)$

2) $\text{TMS} = \frac{(\partial U / \partial \bar{x})}{(\partial U / \partial Y)} = \frac{P_x}{P_y}$

3) $t^1 e = e(tP_x, tP_y, U)$

Empresa

1) $\text{Max.} Q$
sa. $CT = wL + rK$
 $Z = Q(L, K) + \lambda(CT - wL - rK)$

2) $\text{TMS} = \frac{PM_g L}{PM_g K} = \frac{w}{r}$

3) $t^1 Q = Q(tL, tK,)$

Comparación

CONSUMIDOR

4) Min. $e(P_x, P_y, U)$
sa. $U(X, Y)$
 $Z = P_x x + P_y y + \lambda(U - u(X, Y))$

5) Las demandas compensadas.

$$\begin{aligned} X_H &= X_H(P_x, P_y, U) \\ Y_H &= Y_H(P_x, P_y, U) \end{aligned} \quad Y_H =$$

Empresa

4) Min. $CT(w, r, Q) = wL + rK$
sa. $Q = q(L, K)$
 $Z = wL + rK + \lambda(Q - q(L, K))$

5) Las demandas condicionadas.

$$\begin{aligned} L_D &= L_D(w, r, Q) \\ K_D &= K_D(w, r, Q) \end{aligned}$$

COMPARACIONES

Consumidor

6) Shepard:

$$X_{H=} \partial e / \partial P_x$$

$$Y_{H=} \partial e / \partial P_y$$

Empresa

6) Shepard:

$$L_{D=} \partial C / \partial w$$

$$K_{D=} \partial C / \partial r$$

APLICACIONES DE LA DUALIDAD EN LA TEORÍA DE LA EMPRESA

1. EL PROBLEMA DUAL EN LA TEORIA DE LA EMPRESA.

APLICACIÓN 1: PROBLEMA DUAL.

“El paraíso de la hamburguesa”

Produce hamburguesas por hora.



K parrilladas
 r precio de alquiler por
hora



L trabajadores contratados
 w precio de un trabajador por
hora

Función de producción : $q = 10 K^{1/2} L^{1/2}$
 El costo total de la producción: $CT = rK + wL$

entonces resolveremos el problema dual en la teoría de la empresa:

$$\text{Min } CT = rK + wL \quad \text{s.a.} \quad Q = 10 K^{1/2} L^{1/2}$$

$$Z = rK + wL + \lambda(Q - 10 K^{1/2} L^{1/2})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial K} &= r - \lambda 5 K^{-1/2} L^{1/2} = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial L} &= w - \lambda 5 K^{1/2} L^{-1/2} = 0 \end{aligned} \right\} \frac{r}{w} = \frac{L}{K} \rightarrow L = \frac{r}{w} K \dots (1)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = Q - 10 K^{1/2} L^{1/2} = 0 \quad (2)$$

$$Q = 10 \left[\frac{wL}{r} \right]^{1/2} L^{1/2}$$

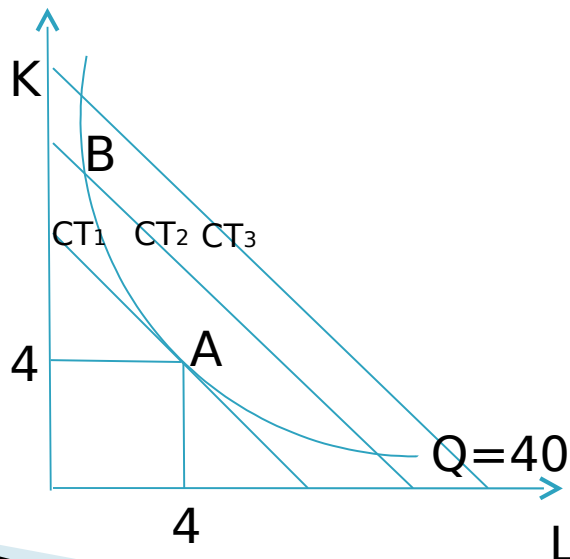
- Supongamos que desean producir 40 hamburguesas por hora, y $r = 4$, $w = 4$.

$$Q = 10 \left[\frac{wL}{r} \right]^{1/2} L^{1/2}$$

$$40 = 10 \left[\frac{4L}{4} \right]^{1/2} L^{1/2}$$

$$4 = L$$

$$4 = K$$



$$CT_1 = 32$$

$$CT_2 = 40$$

- 2. EL PROBLEMA PRIMAL EN LA TEORIA DE LA EMPRESA.

Función de producción de la empresa :

$$q = 10 K^{1/2} L^{1/2}$$

El costo total de la producción:

$$CT = rK + wL$$

Datos del problema:

$$r = w = 4 \quad CT = 32$$

$$\begin{array}{ll} \max & Q = 10 K^{1/2} L^{1/2} \\ \text{s.a} & CT = rK + wL \end{array}$$

En este caso, la expresión del problema de maximización de producción de la empresa es

$$\max Z = 10K^{1/2}L^{1/2} + \lambda(CT - rK - wL)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial K} &= 5K^{-1/2}L - 4\lambda = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial L} &= 5K^{1/2}L^{-1/2} - 4\lambda = 0 \end{aligned} \right\} \frac{P_{mg_K}}{P_{mg_L}} = \frac{r}{w} \Rightarrow \frac{5K^{-1/2}L^{1/2}}{5K^{1/2}L^{-1/2}} = \frac{L}{K} = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow K = L \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = CT - rK - wL = 0 \quad (2)$$

* Hallando la combinación óptima de factores

(1)..en..(2)

$$CT = 4L + 4L \Rightarrow CT = 8L$$

$$\text{como..} CT = 32 \Rightarrow L = 4$$

$$K = 4$$

* ahora hallamos "q" que maximiza la producción

reemplazando "k" y "L" en la función de producción

$$q = 10[4]^{1/2}[4]^{1/2} \Rightarrow q = 40$$

ANÁLISIS GRÁFICO

