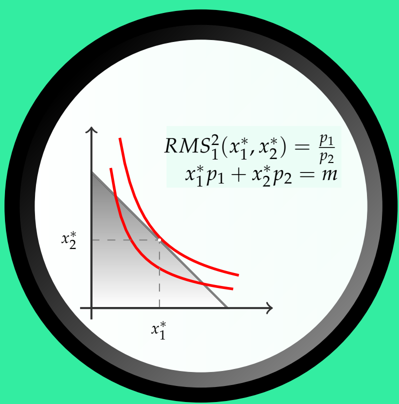
Microeconomía I

Microeconomía I

Tema 3.-
Modelo básico de elección del consumidor



Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía
Universidad de Cantabria
alvarezp@unican.es

Índice

3.1 Introducción

El objetivo de este tema es la construcción de un modelo básico de comportamiento del consumidor. Más concretamente, se centra la atención en el análisis de los factores que determinan la cantidad que decide comprar de un determinado bien (bien 1). Veremos que dichos factores se pueden separar en dos grandes grupos: los relacionados con sus **preferencias** y los relacionados con sus **posibilidades**.

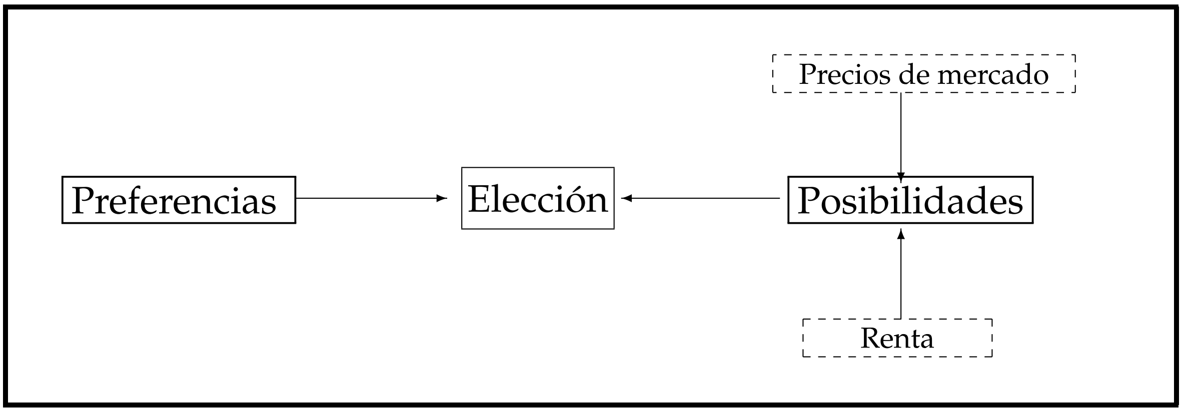


Figura 3.1. Determinantes de la elección del consumidor con información perfecta y un sistema completo de mercados

En el estudio teórico del comportamiento del consumidor es habitual partir del supuesto básico de que los individuos toman sus decisiones –en este caso de compra de bienes y servicios en los mercados– de manera **racional**: eligen la cesta de bienes más preferida de entre todas las que están a su alcance. Partiendo de este supuesto, el modelo nos permitirá derivar una serie de conclusiones sobre como cabe esperar que responda el consumidor ante determinados cambios en los precios de mercado y en su renta disponible.

Aunque en este curso utilizaremos este modelo básico de elección del consumidor como una pieza dentro del modelo más general sobre el funcionamiento de los mercados competitivos, su trascendencia va mucho más allá. En primer lugar, porque constituye el punto de partida de modelos más completos que abordan la toma de decisiones de los consumidores en otros ámbitos (mercado de trabajo, elección intertemporal,...) o marcos más complejos (elección con incertidumbre ...) En segundo lugar, porque el propio modelo facilita un marco del que derivar hipótesis sobre el comportamiento del consumidor susceptibles de ser contrastadas empíricamente.

La primera pregunta del tema se centra en la modelización de las posibilidades, esto es, de los determinantes del conjunto de cestas entre las que puede elegir el consumidor. Se comienza analizando una situación sencilla en la cuál las cestas al alcance del consumidor dependen únicamente de su renta disponible y de los precios de mercado de los distintos

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

bienes y servicios. A continuación se considrean situaciones más realistas, en las cuales las posibilidades del consumidor se ven afectadas por la intervención del Gobierno (a través de impuestos, subvenciones,...) o por las políticas comerciales de los empresas distribuidoras.

En la segunda pregunta se desplaza la atención a las preferencias del consumidor. Mientras que los factores que determinan las posibilidades son generalmente observables, las preferencias de los individuos no lo son. Nuestro punto de partida será la imposición de una estructura mínima a las preferencias a partir de un conjunto de axiomas[1].

En la última pregunta del tema completamos el modelo de elección del consumidor combinando los factores relacionados con las posibilidades con los relacionados con las preferencias para caracterizar la elección óptima. Bajo el supuesto de que las preferencias permanecen estables, la respuesta de los individuos ante cambios en las condiciones que determinan sus posibilidades nos revelarán información sobre sus preferencias. Como veremos posteriormente, este es el principal contenido de la teoría de la demanda: **es posible aprovechar la información que revelan los agentes con sus decisiones de compra en los mercados para conocer sus preferencias**. El conocimiento de dichas preferencias resulta básico para orientar correctamente las decisiones públicas que afectan a las asignación de los recursos (qué tipo de impuestos y subvenciones establecer, como regular los distintos mercados, decidir si se lleva a cabo o no un determinado proyecto público, ...).

3.2 Las posibilidades: restricción presupuestaria y conjunto asequible

3.2.1 Conjunto asequible y recta de balance

Supongamos que el consumdidor dispone de una renta dada m, para asignar al consumo de K bienes distintos, cada uno de ellos con un precio de mercado $p_k,\ \ k = 1, \ldots, K$. Bajo estos supuestos la cesta de bienes[2] que decida comprar deberá cumplir la siguiente **restricción presupuestaria**:

$$\sum_k p_k x_k \leq m.$$

Las cestas o combinaciones de bienes que cumplen dicha restricción forman el denominado **conjunto asequible**:

$$A = \{(x_1, \ldots, x_K) : \sum_k p_k x_k \leq m\}.$$

Sin pérdida de generalidad, y de cara a facilitar el análisis gráfico, suponemos inicialmente que el consumidor asigna toda su renta al consumo de dos únicos bienes, el bien 1, cuya

[1]Un axioma es una proposición que consideramos verdadera *a priori*.

[2]Definimos una cesta de bienes como un vector $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_K)$, donde x_k, $k = i, \ldots, K$, es la cantidad del bien k que hay en la cesta.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

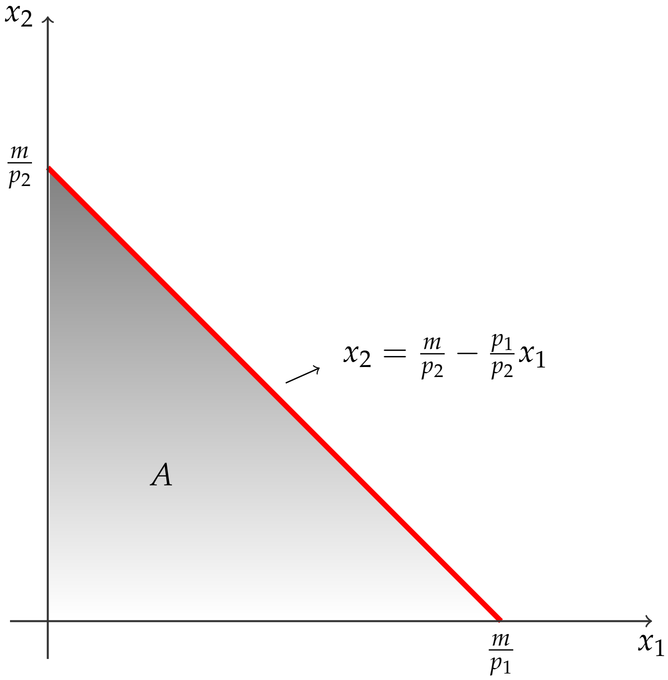


Figura 3.2. ***El conjunto asequible y la recta presupuestaria.***Conjunto asequible y recta presupuestaria para un consumidor que dispone de una renta de m unidades monetarias y que puede comprar las cantidades que desee a los precios de mercado p_1 y p_2.

demanda queremos estudiar, y el bien 2, que podemos considerar como *el resto de bienes*. En este caso el conjunto asequible será [3]:

$$\boxed{A = \{(x_1, x_2) : p_1x_1 + p_2x_2 \leq m\}.} \tag{3.1}$$

La Figura 3.2 recoge el conjunto asequible para unos determinados valores de los precios y de la renta. Las cestas de la frontera de dicho conjunto (las que agotan la renta) forman la **recta presupuestaria**:

$$\boxed{RP = \{(x_1, x_2) : p_1x_1 + p_2x_2 = m\} = \{(x_1, x_2) : x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1\}.} \tag{3.2}$$

La pendiente de la RP nos informa sobre el coste de oportunidad de una unidad de x_1 en términos de unidades de x_2 a las que se renuncia y vendrá dada por[4]:

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{dm=0} = -\frac{p_1}{p_2}.$$

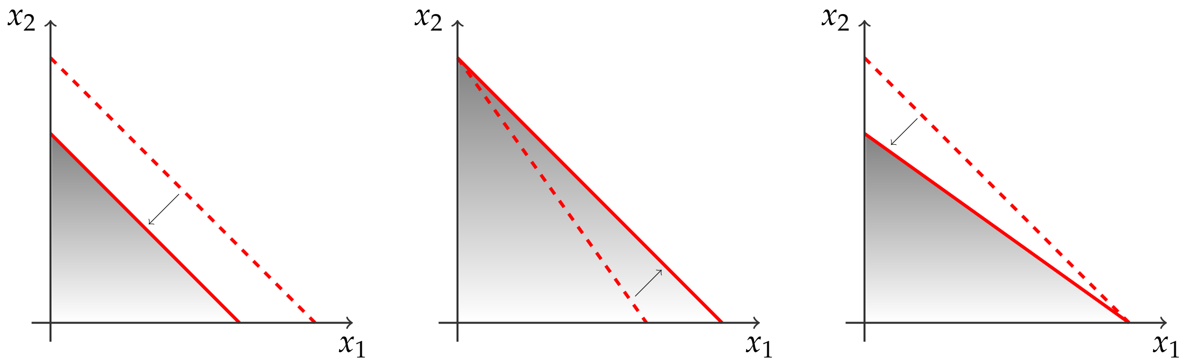
[3]La definición exacta del conjunto asequible debe incluir las restricciones de no negatividad para las cantidades de ambos bienes: $A = \{(x_1, x_2) : p_1x_1 + p_2x_2 \leq m,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$.

[4] La notación que hemos adoptado pretende recordar que estamos calculando el valor de la derivada cuando nos movemos por la recta presupuestaria, esto es, cuando el nivel de renta necesario para comprar las cestas (el gasto en el que incurre el consumidor) permanece constante.

Por cada unidad del bien 1 que el consumidor renuncie a comprar liberará p_1 um, con las cuales puede comprar $\frac{p_1}{p_2}$ unidades adicionales de x_2.

3.2.2 Cambios en los precios y en la renta

Ante cambios en los precios de mercado o en la renta, la restricción presupuestaria y el conjunto asequible del consumidor también cambiarán. Más adelante veremos la utilidad práctica de un modelo que permita asociar los cambios en las cantidades que compra el consumidor de los distintos bienes con los cambios en las variables que determinan su conjunto asequible (precios y renta).



(a) Descenso en m (b) Descenso en p_1 (c) Aumento en p_2

Figura 3.3. Repercusión sobre la recta presupuestaria y el conjunto asequible de cambios en la renta disponible y en los precios.

En el marco sencillo que venimos considerando, en el cual el conjunto asequible queda determinado por los precios de mercado y por la renta, la Ecuación 3.2 permite apreciar fácilmente las repercusiones que tendrían cambios en p_1, p_2 o m sobre el conjunto asequible. En la Figura 3.3 se recoge la repercusión sobre la restricción presupuestaria y el conjunto asequible para tres posibles cambios en los parámetros.

3.2.3 Un planteamiento más general

El marco considerado hasta ahora para determinar el conjunto asequible del consumidor puede ampliarse para considerar situaciones más realistas. A modo de ejemplo, muchas veces a la hora de comprar un determinado bien o servicio los consumidores no se enfrentan a precios fijos por unidad (tarifas lineales), sino que las empresas optan en muchas ocasiones por aplicar descuentos por volumen de compras, tarifas en dos partes [5],.... Habitualmente el conjunto asequible para el consumidor tambén se afectado por la intervención de las distintas administaciones públicas a través de los impuestos directos e indirectos, las

[5]En una tarifa en dos partes el total a pagar por el consumidor vendría dado por $G(x_1) = F + vx_1$, siendo F la parte fija y v la variable.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

subvenciones en métalico o a la compra de determinados bienes y servicios, y otra serie de intervenciones regulatorias como el racionamiento de algunos bienes y servicios.

Ejemplo 3.2.1 *Suponga que el consumidor recibe una subvención de cuantía fija por un importe de* S um *asociada al consumo del bien 1 y al mismo tiempo tiene que pagar un impuesto de* t um *por unidad comprada del bien 2. En este caso su restricción presupuestaria vendría dada por:*

$$RP = \{(x_1, x_2) : p_1 x_1 - S + (p_2 + t)x_2 = m\} \Leftrightarrow \{(x_1, x_2) : x_2 = \frac{m+S}{p_2+t} - \frac{p_1}{p_2+t}.\}$$

Ejemplo 3.2.2 *Suponga que al consumidor se le raciona la cantidad del bien 1 que puede consumir por periodo de tiempo. Si la cantidad máxima que se le permite consumir fuese* $\hat{x}_1$*, el conjunto asequible vendría dado por:*

$$A = \{(x_1, x_2) : p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m; \quad x_1 \leq \hat{x}_1.\}$$

3.2.4 El bien 2 como numerario[6]

Dado que nuestro interés se centra en el estudio de la demanda de mercado del bien 1, en algunas ocasiones resulta útil suponer que el precio del bien 2 es la unidad, en cuyo caso la restricción presupuestaria adopta la forma:

$$x_1 p_1 + x_2 = m \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = m - x_1 p_1.$$

Presentada de esta forma puede dársele la siguiente interpretación: dada la renta disponible y el precio del bien 1, el consumidor decide cuanto comprar del bien 1 (x_1), quedando automáticametne determinada **la cantidad de renta que asigna para comprar otros bienes** (x_2).

[6] Decir que utilizamos un bien como numerario equivale a afirmar que medimos tanto la renta como el precio de los demás bienes en términos de unidades de ese bien. A modo de ejemplo, si considerásemos el trigo como numerario, expresaríamos tanto la renta como los precios de todos los demás bienes en kilos de trigo.

3.3 Las preferencias: representación mediante curvas de indiferencia

3.3.1 El conjunto de elección y la relación de preferencia

Vamos a considerar como punto de partida que las preferencias del consumidor están definidas sobre el conjunto de cestas con cantidades no negativas de ambos bienes, al cual denominaremos **conjunto de elección**[7]:

$$E = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.\} \tag{3.3}$$

Supondremos además que dichas preferencias pueden recogerse a partir de una relación binaria (se establece entre pares de cestas) que denominaremos **relación de preferencia**. Más concretamente utilizaremos la relación *al menos tan preferida como*, $\succeq$, también denominada *preferencia débil*. Alternativamente, podríamos recoger las preferencias utilizando conjuntamente las relaciones binarias *estrictamente preferida a*, $\succ$, e *indiferente a*, $\sim$. Todas las proposiciones que se establezcan en términos de $\succeq$ pueden establecerse utilizando conjuntamente $\succ$ y $\sim$.

Ejercicio 3.3.1 *Determine la forma de expresar $\mathbf{x}^i \succ \mathbf{x}^j$ utilizando la relación $\succeq$. Haga lo mismo para el caso de $\mathbf{x}^i \sim \mathbf{x}^j$*

3.3.2 Los axiomas sobre la relación de preferencia(I): haciendo el problema de elección manejable

Vamos a imponer una serie de axiomas a la relación de preferencias, esto es, una serie propiedades sobre las preferencias del consumidor cuyo cumplimiento tomamos como un supuesto.

Axioma 3.3.1 (Ordenación completa) *$\forall\, \mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j \in E$ se cumplirá $\mathbf{x}^i \succeq \mathbf{x}^j$ o $\mathbf{x}^j \succeq \mathbf{x}^i$ o ambas a la vez.*

El significado último de este axioma es que si el consumidor se enfrenta a la elección entre dos cestas cualesquiera no manifestará indecisión: preferirá una a la otra o se mostrará indiferente entre ambas. Si se cumple esta axioma, dada una cesta cualquiera $\mathbf{x}^i$, cualquier otra cesta de E será comparable con $\mathbf{x}^i$ y, por tanto, pertenecerá a uno de los siguientes conjuntos:

- El conjunto de cestas preferidas a $\mathbf{x}^i$, que denominaremos $M(\mathbf{x}^i)$.
- El conjunto de cestas indiferentes a $\mathbf{x}^i$ que denominaremos $I(\mathbf{x}^i)$.
- El conjunto de cestas menos preferidas que $\mathbf{x}^i$, que denominaremos $P(\mathbf{x}^i)$.

[7] Lo verdaderamente importante es que el conjunto de elección comprenda todas las cestas susceptibles de pertenecer al conjunto asequible del consumidor, ya que el objetivo último es tratar de explicar como cambia la elección cuando cambia el conjunto asequible.

Dado que los conjuntos $I(\mathbf{x}^i)$ y sus correspondientes representaciones gráficas, **las curvas de indiferencia**, desempeñarán un papel central en nuestro intento de caracterizar las preferencias del consumidor conviene resaltar su definición:

$$\boxed{I(\mathbf{x}^i) = \{(x_1, x_2) \in E : (x_1, x_2) \sim (x_1^i, x_2^i).\}} \tag{3.4}$$

Ejercicio 3.3.2 *¿Es completa la relación* «al menos tan joven como» *referida a la edad en años de todos los miembros de la clase ? ¿Y la relación* «estrictamente más joven que»*?*

Ejercicio 3.3.3 *Explique la diferencia entre afirmar que, para el consumidor, la cesta $\mathbf{x}^j$ es **indiferente** a la $\mathbf{x}^i$ y afirmar que la cesta $\mathbf{x}^j$ es **incomparable** con la cesta $\mathbf{x}^j$.*

Axioma 3.3.2 (Transitividad) *Dadas tres cestas de bienes cualesquiera $\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j, \mathbf{x}^k \in \mathbf{E}$, si $\mathbf{x}^i \succeq \mathbf{x}^j$ y $\mathbf{x}^j \succeq \mathbf{x}^k \Rightarrow \mathbf{x}^i \succeq \mathbf{x}^k$.*

Este axioma impone una cierta consistencia en las preferencias del consumidor; si no se cumpliese y le hiciésemos elegir una de las tres cestas, fuese cual fuese su elección siempre habría una de las cestas no elegidas que sería «más preferida».

Ejercicio 3.3.4 *Suponga que un consumidor manifestase que $\mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^2$, que $\mathbf{x}^2 \succ \mathbf{x}^3$ y que $\mathbf{x}^3 \succ \mathbf{x}^1$. ¿Cuál es su cesta más preferida?*

En términos de las curvas de indiferencia este supuesto implica que ninguna cesta puede pertenecer a más de una. Si $\mathbf{x}^k$ perteneciese simultáneamente a dos conjuntos de indiferencia distintos, por ejemplo $I(\mathbf{x}^i)$ y $I(\mathbf{x}^j)$, tendríamos que:

$$\mathbf{x}^k \sim \mathbf{x}^i, \quad \mathbf{x}^k \sim \mathbf{x}^j \quad \not\Rightarrow \quad \mathbf{x}^i \sim \mathbf{x}^j,$$

ya que si $I(\mathbf{x}^i)$ es distinto de $I(\mathbf{x}^j)$ no se puede cumplir que $\mathbf{x}^i \sim \mathbf{x}^j$.

Los axiomas 3.3.1 y 3.3.2 suponen conjuntamente que el consumidor es capaz de ordenar de más a menos preferidas cualquier conjunto finito de cestas pertenecientes al conjunto de elección, E, manifestando indiferencia entre algunas cestas. En términos más formales se dice que una relación que cumple los axiomas 3.3.1 y 3.3.2 es un *preorden completo*, que en este caso podemos denominar *preorden de preferencias*[8].

El hecho de que $\succeq_i$ sea un preorden completo supone que toda cesta, $\mathbf{x}^i$, pertenecerá a un y solo un conjunto de indiferencia $I(\mathbf{x}^i)$. En términos de las curvas de indiferencia, en tanto que representación gráfica de dichos conjuntos, sólo sabemos hasta ahora que no se cortarían (no tendrían cestas en común) y que cada cesta estaría asociada a una curva. Los axiomas que siguen, al imponer una estructura más rígida a las preferencias, supondrán también propiedades adicionales que han de cumplir las curvas de indiferencia.

Axioma 3.3.3 (Continuidad) *Dadas dos cestas cualesquiera $\mathbf{x}^i$ y $\mathbf{x}^j$ tales que $\mathbf{x}^i \succ \mathbf{x}^j$, siempre*

[8] Algunos autores utilizan el término relación de preferencia para referirse a un preorden completo.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

existirá una bola[9] $B(\mathbf{x}^i, r)$ *tal que todas las cestas de dicha bola también serán preferidas a* $\mathbf{x}^j$.

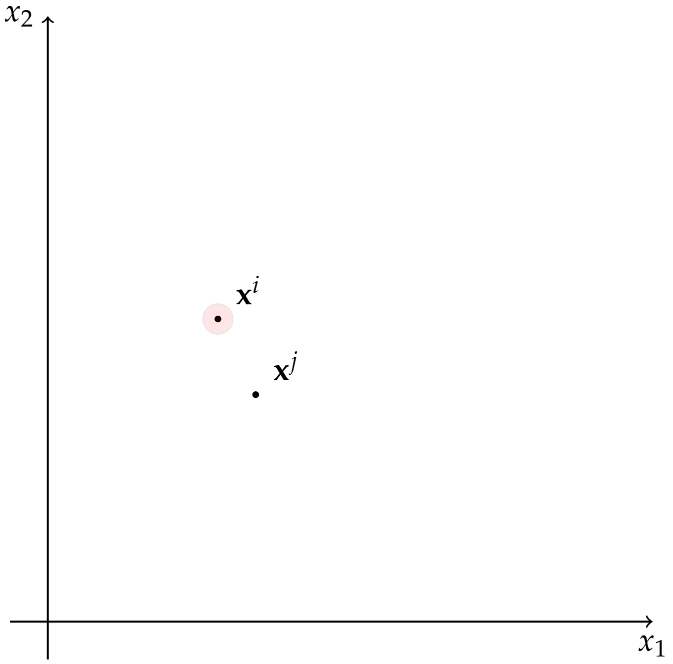


Figura 3.4. ***Continuidad.*** Si el consumidor manifiesta que $\mathbf{x^i} \succ \mathbf{x^j}$ siempre podremos encontrar una distancia, r, suficientemente pequeña tal que todas las cestas que se encuentren en la bola con centro $\mathbf{x^i}$ y radio r también serán preferidas a $\mathbf{x^j}$.

El objetivo de este axioma es facilitar el manejo del modelo matemático de elección del consumidor. La imposición del mismo facilita el desarrollo del modelo matemático y su contenido económico no parece excesivamente restrictivo[10]: las cantidades de los bienes cambian de manera continua y ante pequeños cambios en las mismas no se producen saltos bruscos en la valoración de las cestas por parte del consumidor.

Ejercicio 3.3.5 *Se dice que las preferencias presentan ordenación lexicográfica cuando el individuo valora por encima de todo la cantidad de uno de los bienes, no estando dispuesto a renunciar cantidad alguna del mismo, por pequeña que sea, a cambio de una cantidad del otro bien, por grande que sea:* $x_1^i > x_1^j \Rightarrow \mathbf{x}^i \succ \mathbf{x}^j$. *Sólo en el caso en que dos cestas tengan la misma cantidad del bien* x_1 *se fijará en la cantidad de* x_2 *para ordenarlas. Demuestre que en este caso no se cumpliría el axioma de continuidad.*

En términos gráficos el axioma de continuidad nos garantiza que las curvas de indiferencia serán continuas.

[9]En matemáticas se define una bola de centro c y radio r como el conjunto de puntos que cuya distancia a c es menor o igual que r.

[10]La construcción de un modelo teórico supone siempre una abstracción de la realidad en aras de facilitar el desarrollo formal del proceso deductivo o de permitir el uso de herramientas matemáticas más potentes. A modo de ejemplo, es frecuente encontrarnos con propiedades impuestas a funciones justificadas en base a que la perdida de realismo que suponen se ve más que compensada con su contribución a la manejabilidad y potencia del modelo.

3.3.3 Los axiomas sobre la relación de preferencias (II): dando contenido a las preferencias del consumidor

Mientras que los tres axiomas anteriores son muy generales y aparecen prácticamente en cualquier modelo de elección individual, los axiomas que vienen a continuación imponen una estructura al problema concreto de la elección del consumidor.

Axioma **3.3.4 (No saciedad)** *Dadas dos cestas cualesquiera*[11] $\mathbf{x}^i$ *y* $\mathbf{x}^j$ *si* $\mathbf{x}^i > \mathbf{x}^j \Rightarrow \mathbf{x}^i \succ \mathbf{x}^j$*. Esto es, si la cesta* $\mathbf{x}^i$ *contiene una mayor cantidad de al menos uno de los bienes y por lo menos la misma de todos los demás, el consumidor manifestará que la prefiere a la* $\mathbf{x}^j$*.*

Este axioma recoge el hecho de que normalmente trabajaremos con *bienes*, esto es, el consumidor prefiere más a menos.

El axioma de no saciedad impone una estructura más rígida a los conjuntos de indiferencia, $I(\mathbf{x}^i)$, la cuál podemos establecer en términos geométricos. En la Figura 3.5 dada la cesta $\mathbf{x}^i$ si se cumple 3.3.4 tendremos que:

1. Las cestas pertenecientes a $I(\mathbf{x}^i)$ han de estar en las regiones B y D.
2. Las cestas de la región A pertenecerán a $M(\mathbf{x}^i)$ y las de la región C a $P(\mathbf{x}^i)$.

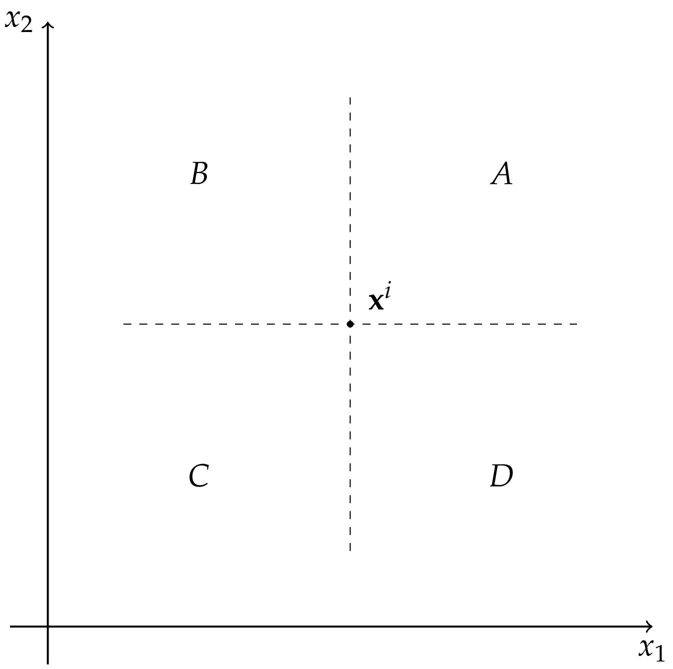


Figura 3.5. ***Si se cumple el axioma de no saciedad las curvas de indiferencias serán decrecientes.*** Para un consumidor que prefiere más a menos, las cestas indiferentes a $\mathbf{x}^i$ estarán necesariamente en B y en D.

Dadas estas dos propiedades, unidas a las que se derivan de los axiomas 3.3.1 al 3.3.3, la representación gráfica de las preferencias vendrá dada por un mapa de **curvas de indiferencia** —asociadas cada una al correspondiente conjunto de indiferencia, $I(\mathbf{x}^i)$— las cuales

[11] La expresión $\mathbf{x}^i > \mathbf{x}^j$ equivale a afirmar que las cantidades de todos los bienes en $\mathbf{x}^i$ son mayores o iguales que en $\mathbf{x}^j$, siendo estrictamente mayor al menos para un bien.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

serán **decrecientes**. De momento nada podemos afirmar sobre su curvatura, aunque si lo podremos hacer una vez incorporemos el siguiente axioma.

Ejercicio 3.3.6 *¿Se cumpliría el axioma de no saciedad en el caso en que el bien x_1 fuese* horas de trabajo al día? *Determine como serían en este caso las curvas de indiferencia si seguimos considerando que x_2 representa la cantidad de un* bien.

Axioma 3.3.5 (Convexidad estricta) $\forall \mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j \in E$, $\forall \lambda \in (0,1)$, *si* $\mathbf{x}^i \succeq \mathbf{x}^j \Rightarrow [\lambda \mathbf{x}^i + (1-\lambda)\mathbf{x}^j] \succ \mathbf{x}^i$.

El axioma anterior implica que el conjunto de cestas *al menos tan preferidas* como una dada, $MD(\mathbf{x}^i)$, es un conjunto estrictamente convexo (cualquier combinación convexa de cestas pertenecientes al conjunto pertenece al interior del conjunto). Resulta sencillo comprobar que dicha propiedad equivale a afirmar que **las curvas de indiferencia serán estrictamente convexas**.

Ejercicio 3.3.7 *Suponga que un consumidor manifiesta que esta indiferente entra la cesta* $\mathbf{x}^1 = (20, 100)$ *y la cesta* $\mathbf{x}^2 = (120, 20)$. *Se pide:*

1. *Represente gráficamente el conjunto de cestas que cumplen la condición:*

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x^1} + (1-\lambda)\mathbf{x^2} \quad \forall\, \lambda \in (0,1).$$

2. *Dibuje una curva de indiferencia que pase por las cestas $\mathbf{x}^1$ y $\mathbf{x}^2$ de tal forma que se cumpla el Axioma 3.3.5.*

En el próximo apartado introducimos el concepto de *relación marginal de sustitución*, el cual nos permitirá comprender mejor el contenido económico de este axioma.

3.3.4 La relación marginal de sustitución

Supongamos que el consumidor dispone inicialmente de una cesta cualquiera $\mathbf{x^a}$ y le preguntásemos a cuantas unidades del bien 2 estaría dispuesto a renunciar a cambio de poder disponer de una cantidad mayor del bien 1, x_1^b. La respuesta a dicha pregunta nos llevaría a un nueva cesta, $\mathbf{x^b}$, la cual, por definición, pertenecería a la misma curva de indiferencia que $\mathbf{x^a}$.El cociente de incrementos $\dfrac{\triangle x_2}{\triangle x_1} \equiv \dfrac{x_2^b - x_2^a}{x_1^b - x_1^a}$ nos informa sobre el número máximo de unidades del bien 2 a las que esta dispuesto renunciar, en media, por cada una de las unidades adicionales del bien 1 que se le ofrece. Si en vez de pasar a $\mathbf{x^b}$, le ofrecemos pasar a x_1^c, podríamos calcular de nuevo el número máximo de unidades que esta dispuesto a dar del bien 2 por cada unidad del 1 al pasar de $\mathbf{x^a}$ a $\mathbf{x^c}$. En ambos caso hemos calculado lo que podríamos llamar **tasa media a la que esta dispuesto a cambiar** unidades del bien 2 por unidades del bien 1($TMeS_1^2(\mathbf{x^i};\mathbf{x^j})$). Podemos apreciar que la convexidad de la curva de indiferencia supone que dicha tasa media disminuye a medida nos movemos por la misma hacia abajo y hacia la derecha: a medida que tiene una mayor cantidad del bien 1 y una menor del bien 2, la disposición a cambiar unidades del 2 por unidades del 1 disminuye.

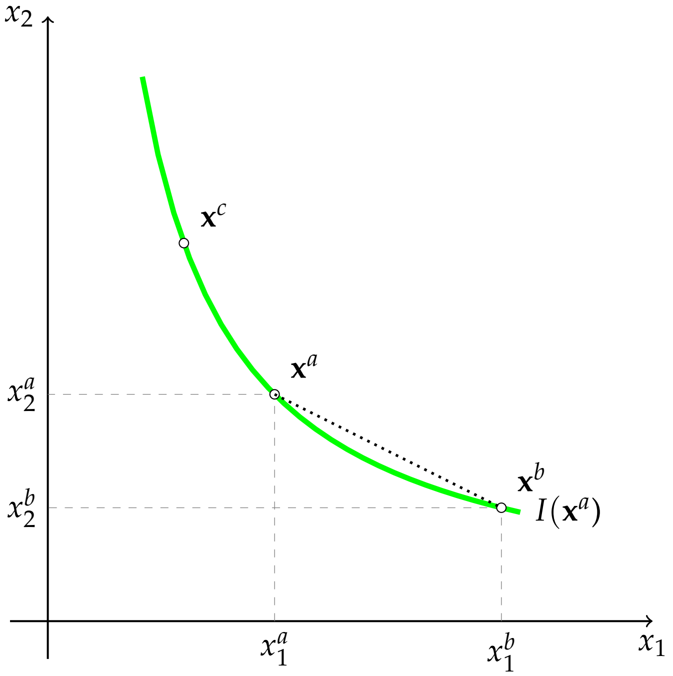


Figura 3.6. ***Disposición a cambiar.*** Si el consumidor dispone inicialmente de la cesta $\mathbf{x}^a$, lo máximo que estaría dispuesto a dar del bien 2 por pasar a tener x_1^b del bien 1 sería $x_2^b - x_2^a$. La pendiente de la recta que une ambas cestas tendrá un valor $\frac{x_2^b - x_2^a}{x_1^b - x_1^a}$ y nos informa sobre la tasa media a la que esta dispuesto a cambiar unidades del bien 2 por unidades del bien 1 al pasar de $\mathbf{x}^a$ a $\mathbf{x}^b$.

Si el cociente de incrementos nos informa sobre la tasa media a la que el consumidor esta dispuesto a cambiar al pasar de una cesta a otra, la derivada, en tanto que límite de dicho cociente, nos informa sobre la disposición marginal a cambiar. Dada una cesta cualquiera (x_1, x_2), se define la **relación marginal de sustitución del bien 2 por el bien 1** en dicho punto, $RMS_1^2(x_1, x_2)$, como:

$$\boxed{RMS_1^2(x_1, x_2) = \lim_{\triangle x_1 \to 0} -\left.\frac{\triangle x_2}{\triangle x_1}\right|_I \equiv -\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_I (x_1, x_2)} \tag{3.5}$$

El valor de la $RMS_1^2(x_1, x_2)$ nos informa sobre la **tasa marginal** a la que el consumidor estaría dispuesto a cambiar unidades del bien 2 por unidades del bien 1 si dispusiese de la cesta (x_1, x_2).

Por otra parte resulta inmediato comprobar que, en términos geométricos, el valor de la $RMS_1^2(x_1, x_2)$ no es sino el valor absoluto de la pendiente de la curva de indiferencia en dicho punto. Si las curvas de indiferencia son convexas (y decrecientes) la pendiente en valor absoluto, y por tanto la $RMS_1^2(x_1, x_2)$, disminuye cuando nos movemos por ellas hacia abajo y hacia la derecha. Ya estamos en condiciones de dar sentido económico al axioma de convexidad en términos de la $RMS_1^2(x_1, x_2)$. La convexidad de las curvas de indiferencia puede interpretarse en términos de $RMS_1^2(x_1, x_2)$ decreciente: a medida que el individuo

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

dispone de más unidades del bien 1 y menos del 2 el número de unidades del bien 2 a las que esta dispuesto a renunciar por disponer de una unidad más del bien 1 es cada vez menor.

Ejercicio 3.3.8 *¿Qué forma tendrían las curvas de indiferencia si la $RMS_1^2(x_1, x_2)$ fuese constante con independencia de la cesta de bienes de que dispusiese el consumidor? ¿Y si fuese creciente?*

A modo de resumen

En los apartados anteriores hemos analizado un conjunto de axiomas que se imponen a las preferencias del consumidor:

1. Ordenación completa
2. Transitividad
3. Continuidad
4. No saciedad
5. Convexidad estricta

Denominaremos **preferencias regulares** a aquellas que cumplen estos cinco axiomas.

Hemos visto también que si se cumplen dichos axiomas podemos recoger las preferencias mediante un **mapa de curvas de indiferencia** que cumplirán las siguientes propiedades:

1. Por cada punto (cesta) pasa una y sólo una curva de indiferencia
2. Son continuas
3. No se tocan ni se cortan
4. Son decrecientes
5. Son estrictamente convexas

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

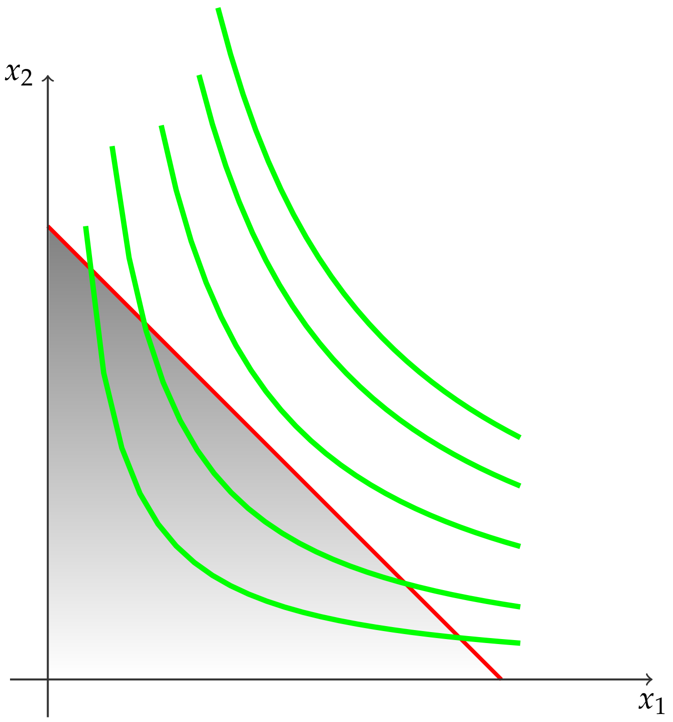


Figura 3.7. ***El mapa de curvas de indiferencia.*** Las curvas de indiferencia recogen gráficamente las características de las preferencias del consumidor, no sólo sobre las cestas del conjunto asequible, sino también sobre todas aquellas que potencialmente puedan estar a su alcance ante un cambio en los precios o en su nivel de renta.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

3.4 Representación numérica de las preferencias: la función de utilidad

3.4.1 Existencia y propiedades de la función de utilidad

Si se cumplen los axiomas 3.3.1, 3.3.2 y 3.3.3 las preferencias del consumidor podrán representarse mediante una función que asigna números a las distintas cestas de acuerdo con las preferencias del consumidor. En términos más formales $\exists\, U : E \mapsto \Re$ tal que:

$$\mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^2 \;\Rightarrow\; U(x_1^1, x_2^1) > U(x_1^2, x_2^2) \quad \text{y si} \quad \mathbf{x}^1 \sim \mathbf{x}^2 \;\Rightarrow\; U(x_1^1, x_2^1) = U(x_1^2, x_2^2).$$

Además, por el axioma de continuidad, dicha función será **continua**.

Si suponemos que también se cumplen los axiomas 3.3.4 y 3.3.5 la función de utilidad *heredará* dos nuevas propiedades:

- Si se cumple el axioma de no saciedad U será **monótona creciente** en sus dos argumentos.
- Si se cumple el axioma de convexidad U será **cuasi-cóncava**.

En cursos superiores se analizará con más detalle todo lo relacionado con la la existencia y las propiedades anteriores de la función de utilidad.

3.4.2 Relación entra las curvas de indiferencia y la función de utilidad

Dada la función $U(x_1, x_2)$ y una cesta de referencia (x_1^i, x_2^i), podemos definir ahora la curva de indiferencia asociada a $\mathbf{x}^i$ como:

$$\boxed{I_i = \{(x_1, x_2) \in E : U(x_1, x_2) = U(x_1^i, x_2^i)\}} \tag{3.6}$$

Ejercicio 3.4.1 *Dada la función de utilidad $u = x_1 x_2$, se pide:*

1. *Determinar la ecuación de la curva de indiferencia asociada a la cesta $(10, 10)$ y representarla gráficamente. ¿Cuánto vale la $RMS_{x_1}^{x_2}$ en ese punto?; ¿y en el $(5, 20)$?; ¿y en el $(20, 5)$?*
2. *Determinar la ecuación general de una curva de indiferencia (la asociada a una cesta general (x_1^0, x_2^0)).*
3. *Partiendo de la ecuación general de una curva de indiferencia, demuestre que todas las curvas de indiferencia serán decrecientes y convexas.*

El valor de la $RMS_{x_1}^{x_2}(x_1, x_2)$ puede obtenerse directamente a partir de la función de utilidad. Dada una cesta de partida $\mathbf{x}^0$, si variamos en una cantidad *infinitesimal* la cantidad de ambos bienes, podemos aproximar la variación en el valor que toma la función de utilidad por su diferencial:

$$du = \frac{\partial U}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0)dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}(\mathbf{x}^0)dx_2.$$

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

Si realizamos los cambios en las cantidades de tal forma que el consumidor siga en la misma curva de indiferencia, se deberá cumplir que $dU = 0$, por lo que tendremos que:

$$RMS_1^2(x_1^0, x_2^0) \equiv -\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_I (x_1^0, x_2^0) = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0)}{\frac{\partial U}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0)}. \tag{3.7}$$

Ejercicio 3.4.2 *Dada la función de utilidad $u = x_1 x_2$, compruebe que el valor de la $RMS_1^2(x_1^0, x_2^0)$ obtenido utilizando la condición 3.7 coincide con el obtenido a partir de la ecuación general de las curvas de indiferencia en el Ejercicio 3.3.7.*

3.4.3 El carácter ordinal de la función de utilidad

El único motivo para recurrir a la función de utilidad para representar las preferencias es que, al permitirnos trabajar con números, nos facilita el tratamiento matemático del problema de elección. Dada una función de utilidad los números que esta asigna a las distintas cestas del conjunto de elección sólo tienen un significado: las cestas a las que asigna números más altos son preferidas por el consumidor a aquellas a las que asigna números más bajos. De hecho, si una función de utilidad recoge las preferencias del consumidor, también las recogerán todas aquellas otras funciones que sean **transformaciones monótonas positivas** de ella. Dada una función cualquiera $f(\mathbf{x})$ una función compuesta $g(f(\mathbf{x}))$ es una transformación monótona positiva[12] de $f(x)$ si se cumple que $\frac{dg}{df} > 0$ en todo el dominio de f.

En la tabla adjunta puede comprobarse como, dada la función de utilidad $U(x_1, x_2) = x_1 x_2$, las funciones $U^T(x_1, x_2) = 100 + 2U$ y $U^T(x_1, x_2) = (U)^2$ ordenan de la misma manera un conjunto dado de cestas.

(x_1, x_2)	$U(x_1, x_2)$	$U^1(x_1, x_2)$	$U^2(x_1, x_2)$
$(1,2)$	2	104	4
$(2,1)$	2	104	4
$(2,2)$	4	108	16
$(1,3)$	3	106	9

Ejercicio 3.4.3 *Determine si las siguientes son o no transformaciones monótonas positivas de una función de utilidad dada, U:*

- $U^T = lnU$
- $U^T = a + bU$
- $U^T = (U)^2$

[12] En general, una función g es una transformación monótona positiva de otra f si siempre que varía f la función g varía en el mismo sentido, lo que podemos expresar mediante la condición $\frac{\triangle g}{\triangle f} > 0$. Si suponemos que g es diferenciable, algo que ocurrirá normalmente con las funciones de utilidad con las que trabajemos, la condición la podemos poner como $\frac{dg}{df} > 0$.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

3.4.4 Algunos ejemplos de funciones de utilidad

Función de utilidad Cobb-Douglas

En nuestro modelo con dos únicos bienes la forma más general de este tipo de función vendría dada por:

$$U(x_1, x_2) = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}. \tag{3.8}$$

No obstante, en tanto que función de utilidad ordinal siempre podremos simplificarla dejándola únicamente en términos de un parámetro:

$$\boxed{U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}.} \tag{3.9}$$

Ejercicio 3.4.4 *Demuestre que la fución 3.9 es una transformación monótona de la función 3.8.*

Ejercicio 3.4.5 *Dada la función de utilidad* $U(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{4}}$ *haga la transformación necesaria para que sus exponentes sumen la unidad.*

Con frecuencia se le aplica la transformación logaritmo neperiano, ya que de esta manera se consigue *linealizarla*:

$$U^T(x_1, x_2) = \alpha \ln x_1 + (1-\alpha)\ln x_2. \tag{3.10}$$

Ejercicio 3.4.6 *Determine el valor de la* $RMS_{x_1}^{x_2}(x_1, x_2)$ *para la función Cobb-Douglas,* $U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$. *Compruebe a continuación que la transformación* $U^T(x_1, x_2) = \alpha \ln x_1 + (1-\alpha)\ln x_2$ *tiene la misma* $RMS_{x_1}^{x_2}(x_1, x_2)$ *para cualquier cesta* (x_1, x_2).

Una propiedad importante de la función Cobb-Douglas es que recoge lo que se denomina **preferencias homotéticas**. Se dice que las preferencias son homotéticas cuando el valor de la $RMS_{x_1}^{x_2}(x_1, x_2)$ depende únicamente de la proporción que guardan entre si las cantidades de los bienes, esto es, del cociente $\frac{x_2}{x_1}$. En términos geométricos esto equivale a afirmar que la pendiente de las curvas de indiferencia permanece constante a lo largo de cualquier rayo que parta del origen.

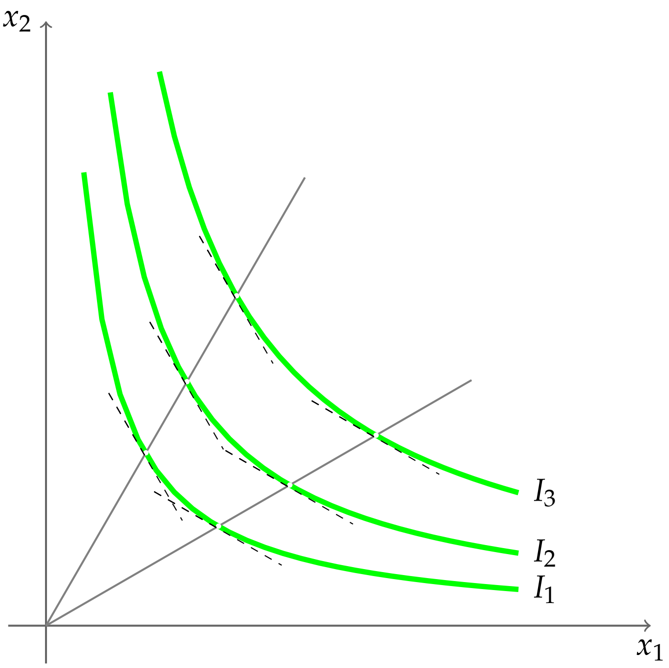


Figura 3.8. ***Preferencias homotéticas.*** Con preferencias homotéticas todas las curvas de indiferencia tienen la misma pendiente a lo largo de un radiovector.

Ejercicio 3.4.7 *Represente gráficamente alguna de las curvas de indiferencia generadas por la función de utilidad* $U(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$ *[por ejemplo las asociadas a las cestas* $(10, 10)$ *y (20,20)]. Explique como cree que cambiaría el mapa de curvas de indiferencia si la función pasase a ser* $U(x_1, x_2) = x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{1}{3}}$.

Funciones de utilidad cuasilineales

Se dice que una función de utilidad es cuasilineal (en el bien 2) cuando adopta la forma general:

$$U(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2,$$

donde $v(x_1)$ es una función no lineal en x_1. La ecuación general de una curva de indiferencia vendrá dada por la expresión $x_2 = \bar{u} - v(x_1)$, por lo que la pendiente de todas ellas permanece constante a lo largo de cualquier recta vertical (podríamos decir que son traslaciones verticales las unas de las otras).

Ejercicio 3.4.8 *Determine la forma de la curvas de indiferencia que genera la función* $U(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2$

Funciones de utilidad con preferencias no regulares

Sustitutivos perfectos

Se dice que el bien 2 es un sustitutivo perfecto del bien 1, si el consumidor siempre esta dispuesto a intercambiar unidades del bien 1 por unidades del bien 2 a una tasa constante,

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

con independencia de la cantidad de que disponga de ambos bienes. En el caso en el que el bien 1 y el bien 2 sean sustitutivos perfectos la función de utilidad adopta la forma general $U(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$, donde a y b son parámetros positivos. Es inmediato comprobar que dicha función genera curvas de indiferencia que son rectas con pendiente $-\frac{a}{b}$. El cociente $-\frac{a}{b}$ nos informará por tanto de la tasa (constante) a la que el individuo esta dispuesto a cambiar unidades del bien 2 por unidades del bien 1.

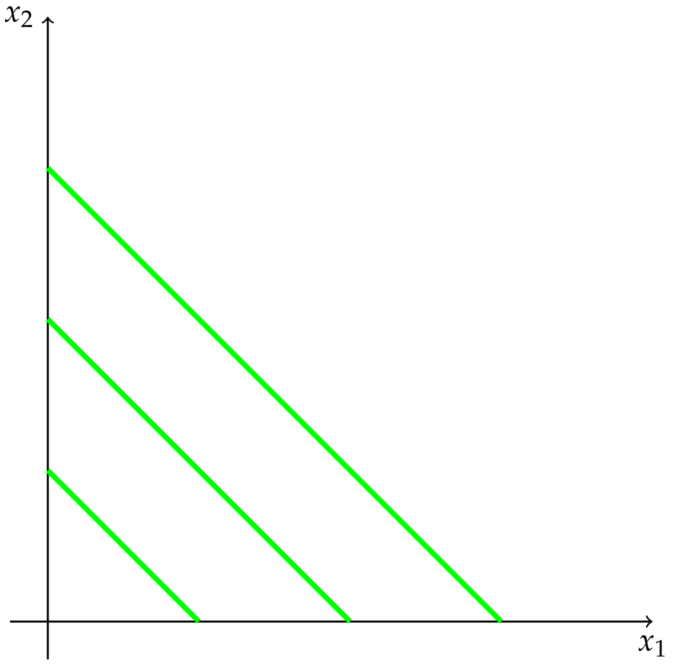


Figura 3.9. ***Mapa de curvas de indiferencia para sustitutivos perfectos.*** Con este tipo de preferencias el consumidor siempre estaría dispuesto a cambiar unidades del bien 2 por unidades del bien 1 a una tasa constante $fracab$.

Ejercicio **3.4.9** *Suponga que el bien 1 son billetes de 5 € y el bien 2 monedas de 1 € Ḃusque una función de utilidad que recoja las preferencias de un individuo en relación con estos dos bienes y dibuje el mapa de curvas de indiferencia correspondiente.*

Complementarios perfectos

Se dice que el bien 2 es complementario perfecto del bien 1 si con cada unidad del bien 1 necesita un número fijo de unidades del bien 2 (podríamos decir que el consumidor sólo está interesado en "paquetes" con una determinada cantidad de cada uno de los dos bienes). En el caso en el que el bien 1 y el bien 2 sean complementarios perfectos la función de utilidad adopta la forma general $U(x_1, x_2) = \text{mín}\{\alpha x_1, \beta x_2\}$, donde α y β son parámetros positivos. El cociente $\frac{\alpha}{\beta}$ nos informará sobre el número de unidades del bien 2 que se combinan con cada unidad del bien 1.

Ejercicio **3.4.10** *Busque una función de utilidad que recoja las preferencias de un individuo que afirma "sólo me gusta tomar café cuando pongo dos cucharaditas de azucar en cada taza". Represente a continuación el mapa de curvas de indiferencia que genera.*

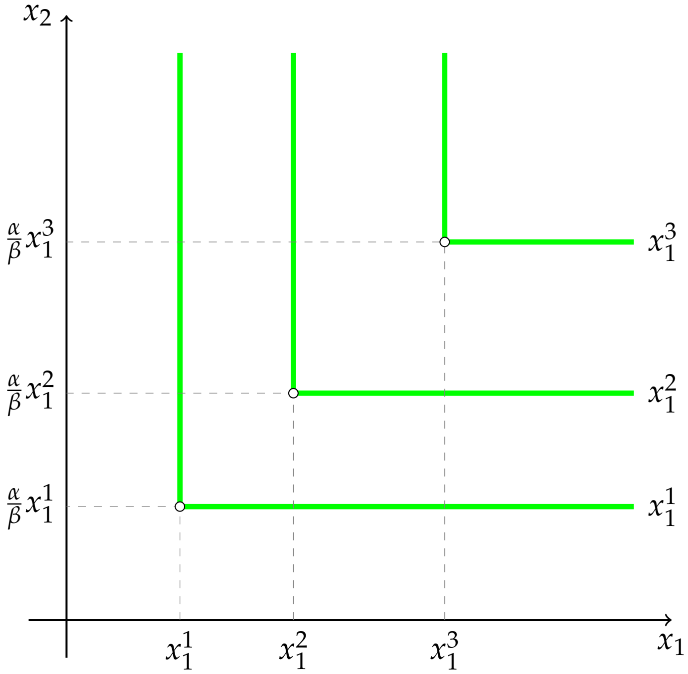


Figura 3.10. ***Mapa de curvas de indiferencia para sustitutivos perfectos.*** Con este tipo de preferencias el consumidor sólo esta interesado en «paquetes» en los que cada unidad del bien 1 va acompañada de $\frac{\alpha}{\beta}$ unidades del bien 2.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

3.5 La elección del consumidor

3.5.1 Planteamiento gráfico

Vamos a comenzar planteando el problema de elección del consumidor en términos gráficos. En la Figura ?? hemos representado el conjunto asequible de un consumidor que dispone de una renta inicial de m^0 *um* y que se enfrenta a unos precios de mercado de los bienes p_1^0 y p_2^0. Sabemos además, que si sus preferencias en relación a las cantidades disponibles de estos dos bienes son regulares, podemos recogerlas mediante un mapa de curvas de indiferencia que serán decrecientes y estrictamente convexas. En la misma Figura ?? hemos representado dos de las infinitas curvas que recogen las preferencias. En términos geométricos, localizar la elección óptima del consumidor equivale a determinar la cesta que le permite situarse en la curva de indiferencia más alejada del origen posible, dada la restricción de que dicha cesta ha de pertenecer al conjunto asequible.

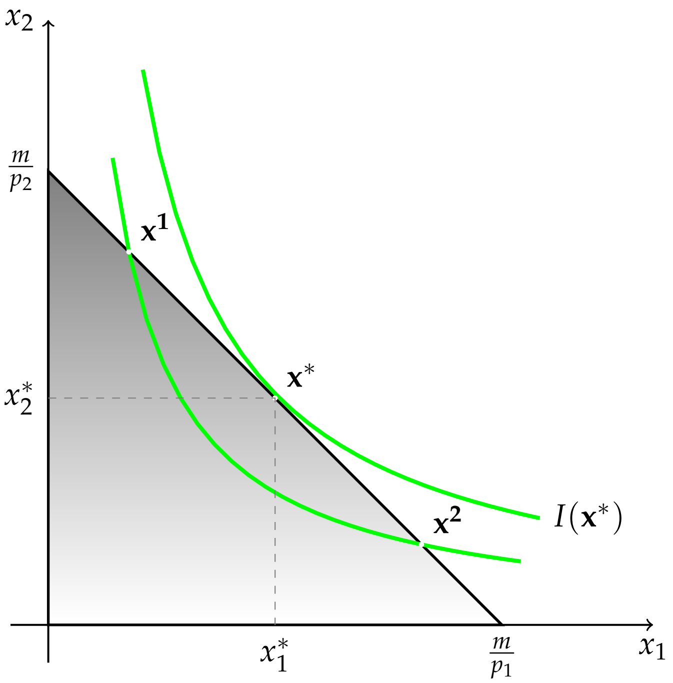


Figura 3.11. ***La elección óptima del consumidor.*** Cuando elije la cesta $\mathbf{x}^*$ el consumidor alcanza la curva de indiferencia más alejada del origen sin salirse de su conjunto asequible: es su elección óptima.

Por el axioma de no saciedad ya podemos anticipar que la elección óptima se situará sobre la restricción presupuestaria y no en el interior de **CA**. Consideremos, por tanto, una cesta cualquiera de **RP**, por ejemplo, $\mathbf{x}^1$. ¿Constituye dicha cesta una elección óptima para el consumidor? Resulta inmediato comprobar que no lo es, ya que el consumidor podría desplazarse a curvas de indiferencia más alejadas del origen moviéndose *hacia abajo* por la restricción presupuestaria. En otras palabras, si el consumidor renunciase a unidades del bien 2 y gastase el dinero ahorrado en comprar más unidades del bien 1 dispondría de una

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

cesta que el prefiere a la $\mathbf{x}^1$. Un razonamiento similar nos llevaría a comprobar que tampoco sería una elección óptima una cesta como la $\mathbf{x}^2$. En este caso el consumidor podría mejorar sin salirse de la **RP** comprando menos del bien 1 y más del bien 2.

La cesta $\mathbf{x}^*$ es la única del conjunto asequible para la que se cumple que al movernos a cualquier otra de dicho conjunto pasaríamos a una curva de indiferencia más próxima al origen. Dicha cesta constituye, por tanto, la elección óptima del consumidor. La caracterización geométrica de dicha cesta viene dada por la siguiente condición: es el único punto de la restricción presupuestaria para el que se produce la tangencia con una curva de indiferencia. Dado que la **condición de tangencia** equivale a afirmar que la pendiente de la restricción presupuesta coíncide con la pendiente de la curva en $\mathbf{x}^*$ se cumplirá que:

$$\boxed{\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_I(\mathbf{x}^*) = \left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{RP}(\mathbf{x}^*) \Leftrightarrow RMS_1^2(x_1^*, x_2^*) = \frac{p_1}{p_2}.} \tag{3.11}$$

La condición de tangencia equivale por tanto a afirmar que el consumidor eligirá una cesta para la cual se cumplirá que la tasa marginal a la que esta dispuesto a cambiar unidades del bien 2 por unidades del bien 1 (nos la da la $RMS_1^2(x_1^*, x_2^*)$ y varía cuando nos movemos de una cesta a otra) coincide con la tasa a la que puede cambiar unidades del bien 2 por unidades del bien 1 en los mercados (nos la da $\frac{p_1}{p_2}$ y es constante a lo largo de **RP**).

Ejercicio 3.5.1 *Considere un consumidor que dispone de una renta de 200* um *para asignar al consumo de dos bienes, 1 y 2, cuyos precios de mercado son $p_1 = 10$ um y $p_2 = 5$ um. Suponiendo que sus preferencias vienen dadas por la función de utilidad $U(x_1, x_2) = x_1 x_2$, se pide:*

1. *Determine matemáticamente la forma de la restricción presupuestaria y represéntela gráficamente.*
2. *Determine la ecuación de la curva de indiferencia que pasa por la cesta $(5, 30)$.*
3. *¿Pertenece la cesta $(5, 30)$ cesta a la restricción presupuestaria? Determine si existe alguna otra cesta dicha curva de indiferencia que pertenezca a la restricción presupuestaria.*
4. *¿Constituye la cesta $(5, 30)$ una elección óptima? ¿Y la $(5, 10)$? ¿Cuánto vale la RMS_1^2 en dichos puntos?*
5. *Plantée gráficamente el problema de elección de la cesta óptima y trate de encontrar las condiciones generales que se han de cumplir.*
6. *Trate de plantear el problema de elección del consumidorcomo un problema matemático de optimización.*

La condición de tangencia nos permite determinar la cesta óptima siempre que dicha cesta contenga cantidades positivas de ambos bienes. En términos más formales podemos decir que **la condición de tangencia es válida siempre que tengamos una solución interior** o, equivalentemente, que no tengamos una solución de esquina. En efecto, la tangencia entre una curva de indiferencia y la restricción presupuestaria podría producirse para valores negativos de alguno de los dos bienes, esto es, fuera del conjunto asequible.

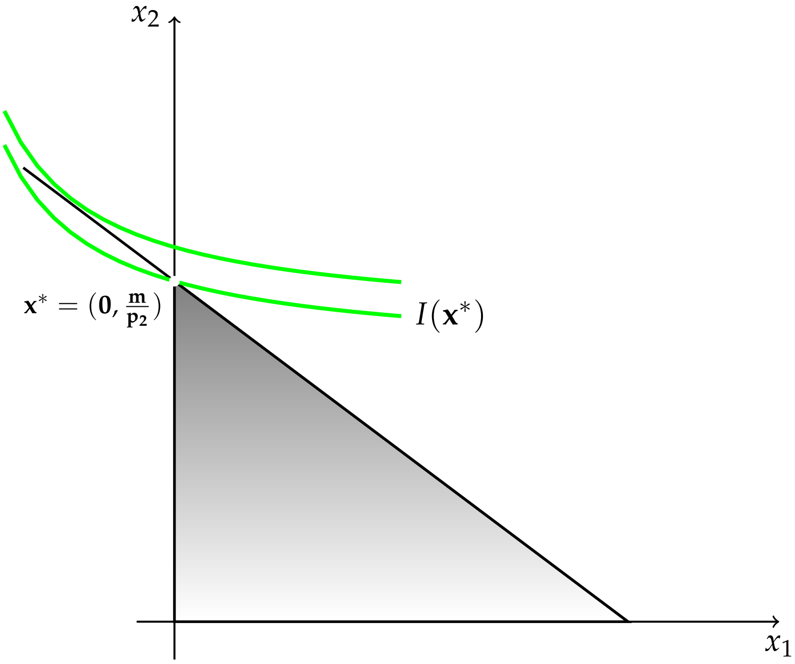


Figura 3.12. ***Solución de esquina.*** En algunos casos las preferencias y/o el conjunto asequible pueden ser tales que la tangencia se produzca fuera del conjunto asequible; en esto casos la elección óptima vendrá dada por una solución de esquina.

Como podemos apreciar en la Figura **??** la mejor de las cestas pertenecientes al conjunto asequible sería la $(0, \frac{m}{p_2})$, de ahí el nombre de solución de esquina.

El análisis gráfico también permite apreciar que **la condición de tangencia constituye una condición necesaria pero no suficiente para una solución interior**. Sin embargo, **si las preferencias son regulares dicha condición será a la vez necesaria y suficiente**.

Ejercicio **3.5.2** *Intente caracterizar a partir del análisis gráfico la elección óptima en los siguientes casos de preferencias no regulares:*

- *Preferencias* estrictamente cóncavas
- *Bienes sustitutivos perfectos*
- *Bienes complementarios perfectos*

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

3.5.2 Planteamiento matemático

En términos matemáticos la forma más general de plantear el problema de elección del consumidor vendría dada por:

$$\begin{aligned} \max_{x_1,x_2} \quad & U(x_1,x_2) \\ \text{sujeto a:} \quad & p_1x_1 + p_2x_2 \leq m \\ & x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Sin embargo, podemos presentar dicho problema de una manera más sencilla. En primer lugar, por el axioma de no saciedad podemos anticipar que la cesta óptima se situará sobre la restricción presupuestaria y no en el interior del conjunto asequible [13] por lo que la restricción presupuestaría aparecerá en forma de igualdad. Además, vamos a abordar inicialmente el problema sin las restricciones de no negatividad aunque más adelante volveremos sobre ellas. Con estas simplificaciones nos quedaría un programa sencillo, con una única restricción en forma de igualdad:

$$\boxed{\begin{aligned} \max_{x_1,x_2} \quad & U(x_1,x_2) \\ \text{s. a:} \quad & p_1x_1 + p_2x_2 = m. \end{aligned}}$$

Podríamos determinar el máximo por sustitución: por ejemplo, despejando x_2 en la restricción y sustituyendo en la función objetivo obtendríamos un problema de maximización no restringida con respecto a x_1. Sin embargo, dicho procedimiento no sería demasiado práctico en problemas más complejos (mayor número de variables, mayor número de restricciones,...), por lo cuál vamos a recurrir a un método más general conocido como **el método de los multiplicadores de Lagrange**.

En términos generales, dado un problema de optimización de la forma:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & f(x,y) \\ \text{s. a:} \quad & g(x,y) = c \end{aligned}$$

la aplicación de dicho método consiste en dar los siguientes pasos:

1. Construir la denominada función Lagrangiana de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda[c - g(x,y)]$$

2. Derivar parcialmente $\mathcal{L}$ con respecto a x, y y λ e igualar a cero dichas derivadas par-

[13] Es útil pensar que el bien 2 recoge *renta para gastar en otros bienes* lo que permite entender mejor el significado del axioma de no saciedad: el consumidor asignará parte de su renta al consumo del bien 1 y reservará el resto para el consumo de otros bienes, pero nunca "tirará" renta.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

ciales.

3. Resolver el sistema formado por las tres ecuaciones anteriores.

De manera similar al caso de maximización sin restricciones, la aplicación de los pasos anteriores sólo nos daría las condiciones necesarias para que los valores de x y de y obtenidos constituyan un máximo de $f(x, y)$. No obstante, si la función objetivo tiene determinadas propiedades, las condiciones anteriores son a la vez necesarias y sufucientes. En nuestro caso podemos afirmar que el hecho de que la función de utilidad sea estrictamente cuasicóncava (propiedad que hereda del supuesto de convexidad estricta de las preferencias) nos garantiza que la aplicación de los pasos anteriores nos lleva directamente al óptimo (suponen a la vez una condición necesaria y suficiente).

Por tanto, dado el problema de elección del consumidor:

$$\begin{array}{rl} \max\limits_{x_1, x_2} & U(x_1, x_2) \\ \text{s. a:} & p_1 x_1 + p_2 x_2 = m, \end{array}$$

si construímos la Lagrangiana adoptará la forma:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = U(x_1, x_2) + \lambda(m - p_1 x_1 - p_2 x_2),$$

y a partir de la misma tendremos como condiciones de primer orden:

$$\begin{array}{rcccl} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) & = & \frac{\partial U}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) - \lambda^* p_1 & = & 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) & = & \frac{\partial U}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) - \lambda^* p_2 & = & 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) & = & m - p_1 x_1^* - p_2 x_2^* & = & 0. \end{array}$$

Resulta inmediato comprobar que la tercera de las condiciones supone exigir que la cesta pertenezca a la restricción presupuestaria, mientras que las dos primeras suponen conjuntamente el cumplimiento de la condición de tangencia:

$$\boxed{\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*)}{\frac{\partial U}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*)} = RMS_1^2(x_1^*, x_2^*) = \frac{p_1}{p_2}.} \tag{3.12}$$

Como cabía esperar, el planteamiento matemático del problema de elección del consumidor nos conduce a las mismas condiciones que el planteamiento gráfico:

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

$$\boxed{\begin{aligned} RMS_1^2(x_1^*, x_2^*) &= \frac{p_1}{p_2} \\ p_1x_1^* + p_2x_2^* &= m. \end{aligned}} \tag{3.13}$$

El hecho de que **la función de utilidad sea estrictamente cuasicóncava nos garantiza que las condiciones anteriores son a la vez necesarias y suficientes** para la determinación del óptimo.

Tan sólo en el caso, poco probable, de que la cantidad de uno de los bienes nos de un valor negativo deberíamos tener en cuenta las restricciones de no negatividad. En ese caso una de las restricciones de no negatividad es efectiva y tendremos lo que se denomina una **solución de esquina**: el consumidor asigna toda la renta al consumo de un único bien.

Ejercicio 3.5.3 *Dada la función de utilidad* $U(x_1, x_2) = (x_1 + 10)(x_2 - 10)$ *determine la elección óptima de un consumidor que dispone de una renta de 50* um *para asignar al consumo del bien 1 y del bien 2, cuyos precios de mercado son* $p_1 = 5$ um *y* $p_2 = 1$ um .

Aunque a partir de ahora centraremos nuestro interés en el comportamiento del consumidor bajo el supuesto de que sus preferencias regulares, en el ejercicio siguiente se plantea la determinación de la elección óptima para el caso de dos funciones de utilidad que recogen **preferencias no regulares**.

Ejercicio 3.5.4 *Suponga que el consumidor dispone de una renta de* m um *para asignar al consumo de dos únicos bienes, 1 y 2. Caracterice la elección óptima para cada uno de los siguientes casos:*

1. *Sus preferencias pueden recogerse a través de la función de utilidad* $U(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$.
2. *Sus preferencias pueden recogerse a través de la función de utilidad* $U(x_1, x_2) = \min\{\alpha x_1, \beta x_2\}$.

A modo de resumen

Dado un problema matemático de determinación de la cesta óptima para el consumidor, es aconsejable seguir los siguientes pasos:

1. Comprobar si la función de utilidad recoge preferencias regulares. En caso negativo identificar de que tipo de preferencias no regulares se trata (sustitutivos perfectos, complementarios perfectos, males,...) y proceder en consecuencia. En caso afirmativo continuar con el paso dos.
2. Si las preferencias son regulares aplicar las condicones 3.13. Si nos da una cantidad positiva de ambos bienes esa es la solución.
3. Si la cantidad de uno de los bienes da negativo, gastará toda su renta en el otro bien.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

3.6 Ejercicios

Ejercicio 3.6.1 *Determine la forma del conjunto asequible para un consumidor que dispone de una renta de 120* um *para asignar al consumo de dos únicos bienes cuyos precios de mercado son* $p_1 = 4$ um *y* $p_2 = 2$ um*. Analice a continuación como cambiaría dicho conjunto asequible en los siguientes casos:*

1. *Un aumento de la renta hasta de 160* um*.*
2. *Un descenso de* p_1 *hasta* 2 um*.*
3. *Un descenso de los precios y de la renta del 25 %.*

Ejercicio 3.6.2 *Suponga que un consumidor dispone de una renta de 2.000* um *para asignar al consumo del bien 1 y de* otros bienes *(bien 2). Sabiendo que* $p_1 = 10$ um *y que* $p_2 = 5$ um*, determine la forma de la restricción presupuestaria y del conjunto asequible teniendo en cuenta que:*

- *El consumidor recibe una subvención por una cuantía fija de 100* um *siempre que la cantidad consumida del bien 1 no supere las 50 unidades.*
- *Si consume más de 100 unidades del bien 1 tiene que pagar un impuesto de 2* um *por cada unidad adicional que compre.*
- *Se prohíbe el consumo de más de 150 unidades del bien por periodo de tiempo.*

Ejercicio 3.6.3 *Suponga que un consumidor dispone de una renta de 400* um *para asignar al consumo del bien* 1 *y al de* otros bienes *(bien 2). El precio del bien* 1 *es de 10* um *y el del bien* 2 *de* 5 um*. Determine la forma de la restricción presupuestaria y del conjunto asequible en cada uno de los siguientes casos:*

1. *El consumidor recibe una subvención de* 1 um *por cada una de las 10 primeras unidades del bien* 1 *que compre. De la misma manera si compra más de 30 unidades ha de pagar un impuesto de* 2 um *por cada una de las unidades adicionales.*
2. *El consumidor recibe una subvención de* 1 um *por unidad del bien* 1 *que compre, pero sólo si su consumo total del bien no supera las 10 unidades. Si compra más de 30 ha de pagar un impuesto de 2 unidades monetarias por cada una de las unidades compradas.*

Ejercicio 3.6.4 *Una determinada empresa ofrece el bien* 1 *en las siguientes condiciones:*

- *El cliente, independientemente de cual sea la cantidad que compre, tiene que pagar una cuota fija de* F um*, la cual le da derecho al consumo gratuito de* $\hat{x}_1$ *unidades del bien.*
- *Si el consumo sobrepasa las* $\hat{x}_1$ *unidades, el cliente deberá abonar* p_1 um *por cada una de las unidades adicionales.*
- *Si el consumo sobrepasa un determinado número de unidades* $\bar{x}_1$ $(\bar{x}_1 > \hat{x}_1)$*, se le hace un descuento de cuantía fija por un importe de* D um*.*

Determine matemáticamente la forma de la restricción presupuestaria y del conjunto asequible al que se enfrenta un consumidor que dispone de m um *para asignar al consumo de dicho bien,* 1*, y al de otros bienes (bien 2). Represente los resultados en un gráfico.*

Ejercicio 3.6.5 *Dos empresas, A y B, dedicadas a suministrar el servicio de conexión a Internet siguen políticas de precios distintas:*

- *La empresa A establece una tarifa mensual fija de* 20 um*, la cual da derecho a 50 horas de conexión; si el consumo sobrepasa dicha cantidad establece un precio 0.75* um *por cada hora*

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

adicional.

- *La empresa B no tiene tarifa fija y establece un precio 1* um *por cada hora de conexión. Además, si el consumo alcanza las 50 horas le da un bono de 25 horas gratis, pasando a cobrar las que pasen de 75 a 0.5* um.

Considere un consumidor que dispone de una renta de m um *para asignar al consumo de este servicio(bien 1) y de al de* otros bienes *(bien 2).*

Determine la forma de la restricción presupuestaria y del conjunto asequible para cada uno de los casos anteriores y represéntelos gráficamente.

Ejercicio 3.6.6 *Determine la forma que adoptaría la recta presupestaria en el caso en que el individuo gasta toda su renta en tres bienes: 1, 2 y 3. Si despejamos x_3 en la ecuación, ¿qué interpretación podemos dar a los coeficientes de x_1 y de x_2?*

Ejercicio 3.6.7 *Suponga que a un trabajador el pagan un salario-hora de w* um *y que puede adquirir la cantidad que desee de un bien x_1 a un precio de mercado p_1. ¿Qué interpretación podríamos dar al cociente $\frac{w}{p_1}$?, ¿y al cociente $\frac{p_1}{w}$?*

Ejercicio 3.6.8 *Considere una situación en la cual el consumidor en lugar de disponer de un nivel de renta dado dispone de una dotación inicial de ambos bienes (x_1^0, x_2^0).*

1. *Determine matemáticamente la restricción presupuestaria y represente en un gráfico el conjunto asequible del consumidor bajo el supuesto de que puede actuar tanto como comprador o como vendedor en cada uno de los dos mercados a los precios vigentes en los mismos, p_1 y p_2.*

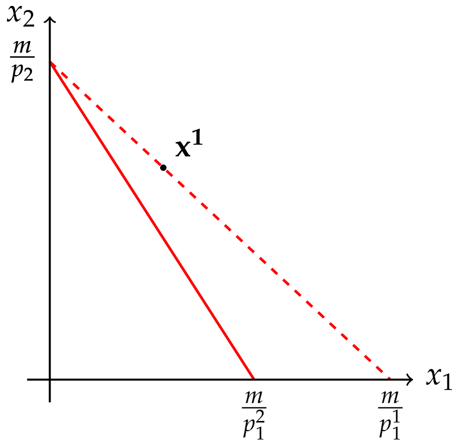
2. *Determine como cambiarían la restricción presupuestaria y el conjunto asequible ante un aumento de p_1.*

3. *Determine matemáticamente la restricción presupuestaria y represente en un gráfico el conjunto asequible bajo el supuesto de que en el mercado del bien 1 el precio al que puede comprar es mayor del precio al que puede vender,$p_1^c > p_1^v$ (debido, por ejemplo, a la existencia de un impuesto sobre el consumo).*

4. *Determine matemáticamente la restricción presupuestaria y represente en un gráfico el conjunto asequible bajo el supuesto de que en el mercado del bien 1 puede actuar únicamente como comprador, pero no como vendedor.*

Ejercicio 3.6.9 *En la figura adjunta aparecen representadas las rectas presupuestarias de un consumidor antes y después de un aumento en p_1. Si nos dicen que el consumidor estaba comprando inicialmente la cesta $\mathbf{x}^1$ y que tras el aumento del precio a pesar de comprar menos de 1 el gasto que realiza en dicho bien ha aumentado,¿en que tramo de la nueva restricción presupuestaria se sitúa la cesta que compra ahora el consumidor($\mathbf{x}^2$)?*

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria



Ejercicio 3.6.10 *Determine la forma de las curvas de indiferencia para cada uno de los siguientes casos de preferencias* no regulares*:*

- *El bien 1 y el bien 2 se consumen siempre en proporciones fijas; en concreto, con cada unidad del bien 1 siempre se consumen 3 unidades del bien 2.*
- *El consumidor siempre esta dispuesto a renunciar a dos unidades del bien 2 por 3 unidades del bien 1.*
- *El consumidor no valora ni positiva ni negativamente el disponer de unidades del bien 1.*
- *Existe una cesta* $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ *que representa la máxima satisfacción para el consumidor. Hasta alcanzar dicho nivel de consumo para cada uno de los bienes prefiere más a menos, pero una vez lo alcanza prefiere menos a más (saciedad).*

Ejercicio 3.6.11 *Suponga que un examen consta de 2 únicas preguntas, puntuándose cada una de ellas de 0 a 10 puntos. ¿Cómo sería el mapa de curvas de indiferencia en relación a los puntos obtenidos en cada una de las preguntas?*

Ejercicio 3.6.12 *En el modelo de elección del consumidor con dos únicos bienes, si consideramos el bien 2 como* renta para gastar en otros bienes*, ¿cómo interpretaría el supuesto de* RMS_1^2 *decreciente?*

Ejercicio 3.6.13 *Considere un grupo de individuos y la relación "estar sentado a la derecha de" para cada uno de los siguientes casos:*

1. *Todos los individuos están sentados en una mesa redonda.*
2. *Todos los individuos están sentados en un banco alargado.*

¿Es una relación completa? ¿Es una relación transitiva?

Ejercicio 3.6.14 *Considera un individuo que afirma que está indiferente entre tener un céntimo de Euro más o menos. ¿Crees que sus preferencias en relación a la cantidad de dinero de que dispone serían transitivas? Razone su respuesta.*

Ejercicio 3.6.15 *Considere las tres cestas de bienes que aparecen en la tabla adjunta y responda a las siguientes preguntas:*

1. *Un consumidor con preferencias* regulares *afirma que esta indiferente entre* C_A *y* C_C*. ¿Qué relación de preferencia guardará la cesta* C_B *con las dos anteriores? Explique detenidamente su respuesta.*

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

2. *Busque una función de utilidad que recoja las preferencias de un consumidor que afirma estar indiferente entre las tres cestas.*

Cesta	x_1	x_2
C_A	60	30
C_B	50	40
C_C	40	50

Ejercicio 3.6.16 *Determine de la manera más precisa posible la forma que tendrían las curvas de indiferencia asociadas a las siguientes funciones de utilidad:*

1. $U(x_1, x_2) = 20x_1 - \frac{1}{2}x_1^2 + x_2$
2. $U(x_1, x_2) = min\{x_1, 3x_2\}$
3. $U(x_1, x_2) = 4x_1 + x_2$
4. $U(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}$

Ejercicio 3.6.17 *Explique como afectaría a las propiedades de la función de utilidad el que uno de los bienes fuese un mal (el individuo prefiere menos a más).*

Ejercicio 3.6.18 *Suponga que las preferencias de un consumidor vienen dadas por la función de utiliad $U(x_1, x_2) = (x_1 + 2)^{1/2}(x_2 + 6)^{1/2}$. Determine la elección óptima bajo el supuesto de que dispone de una renta de 90* um *para asignar al consumo de ambos bienes y que sus precios son $p_1 = 1$* um *y $p_2 = 2$* um.

Ejercicio 3.6.19 *Considere un consumidor que dispone de 500* um *para asignar al consumo de dos bienes cuyos precios en los mercados son, respectivamente, $p_1 = 1$* um *y $p_2 = 2$* um. *Determine la elección óptima del consumidor para cada uno de los siguientes casos:*

1. *Sus preferencias pueden recogerse mediante la función de utilidad $U(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$*
2. *Sus preferencias pueden recogerse mediante la función de utilidad $U(x_1, x_2) = min\{2x_1, x_2\}$*
3. *Sus preferencias pueden recogerse mediante la función de utilidad $U(x_1, x_2) = 3x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$.*

Ejercicio 3.6.20 *Suponga que un consumidor dispone de 15.000* um *para asignar al consumo de dos bienes y que sus preferencias están recogidas por la función de utilidad $U(x_1, x_2) = 2x_1x_2$. Del bien 2 puede comprar en el mercado la cantidad que desee a un precio 100* um *mientras que para el caso del bien 1 dispone de dos alternativas:*

1. *La empresa A le ofrece la posibilidad de comprar la cantidad que desee a un precio de* 50 um.
2. *La empresa B le ofrece la posibilidad de comprar a un precio de 40* um *pero para ello tiene que hacerse socio de la misma pagando una cantidad fija de 3.000* um.

Determine cuál de las dos opciones prefiere el consumidor.

Ejercicio 3.6.21 *Considere una situación en la cual hay dos únicos consumidores, A y B. Suponga que las preferencias de dichos consumidores en relación con los dos únicos bienes de que pueden disponer, 1 y 2, vienen dadas por $U_A(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$; $\quad U_B(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. El consumidor A dispone inicialmente de 100 unidades del bien 1 y de 200 del bien 2 , mientras que el B dispone de 200 unidades del 1 y de 100 del 2. Determine de la manera más completa y precisa posible el tipo de intercambios que cabe esperar realicen entre ellos (Nota: la pregunta equivale a determinar el conjunto de acuerdos entre ambos que serían eficientes en el sentido de Pareto.)*

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

Ejercicio 3.6.22 *Los padres de Andrés le asignan una renta semanal fija de S um, ofreciéndole la posibilidad de aumentar sus ingresos ayudándoles, en su tiempo libre, en la tienda familiar. En concreto, le han ofrecido una cantidad de w um por cada hora que dedique a ayudarles.*

1. *Considere las preferencias de Andrés en relación la número de horas que trabaja durante la semana (bien 1) y el ingreso semanal disponible (bien 2). ¿Cómo serán sus curvas de indiferencia? (Puede resultarle útil, a la hora de analizar la convexidad o no de las mismas, razonar en términos de relación marginal de sustitución de ingresos por horas de trabajo).*
2. *Determine la ecuación de la restricción presupuestaria y dibuje la recta de balance.*
3. *Ilustre gráficamente la elección óptima de Andrés. ¿Cómo cambiaría ésta si sus padres decidiesen subirle el salario-hora?*

Ejercicio 3.6.23 *Considere la situación de Robinson Crusoe en relación con la elección del número de unidades del bien 1 (horas de ocio) y del bien 2 (cantidad de alimentos, vivienda, protección,...) de las que puede disponer por periodo de tiempo (p.ej. la semana).*

1. *Suponga que a medida que dedica más tiempo a trabajar es menos productivo, y analice la forma de la restricción presupuestaria y del conjunto asequible. (Pista: ¿Es constante el coste de oportunidad de obtener una unidad adicional del bien 1 ? £Seguirá siendo lineal la restricción presupuestaria?).*
2. *En relación con las preferencias, ¿qué significado tendría aquí la RMS_1^2?; ¿cómo serían las curvas de indiferencia?.*
3. *Ilustre gráficamente el problema de elección resultante.*

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria